

THIAGO LEISTER SÁ

**MODELAGEM DO SISTEMA DE TRAÇÃO DE UM TREM DE ALTA
VELOCIDADE – TAV**

São Paulo

2012

THIAGO LEISTER SÁ

**MODELAGEM DO SISTEMA DE TRAÇÃO DE UM TREM DE ALTA
VELOCIDADE – TAV**

Monografia apresentada ao Departamento
de Engenharia Mecânica da Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Engenheiro
Mecânico

Área de concentração: Engenharia
Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Roberto Spínola
Barbosa

São Paulo
2012

FICHA CATALOGRÁFICA

Sá, Thiago Leister

**Modelagem do sistema de tração de um trem de alta
velocidade / T.L. Sá. -- São Paulo, 2012.**

63 p.

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Dinâmica (Modelagem) 2. Tração elétrica 3. Trens
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
de Engenharia Mecânica II. t.**

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe que
sempre esteve ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Roberto Spínola Barbosa, pela orientação, pelo constante estímulo transmitido durante este trabalho e pela paciência e conselhos dispensados a mim inúmeras vezes.

À minha família por sempre estar junto de mim, ainda que distante, e não deixar que eu desistisse nunca daquilo que era bom para mim por mais difícil que fosse superar os obstáculos.

Aos amigos por me ajudarem a transformar momentos difíceis em momentos de superação e momentos de conquista em animadas comemorações.

À Equipe Poli de BAJA por me ensinar que para vencer é preciso inteligência, mas muito mais força de vontade, e a todos que colaboraram direta ou indiretamente, na execução deste trabalho.

With great power comes great responsibility

(Stan Lee)

RESUMO

Este trabalho objetivou modelar a dinâmica longitudinal de um trem de alta velocidade (TAV) completo com particular atenção ao sistema de tração elétrica e a mecânica de contato roda/trilho para investigação dos efeitos do escorregamento sobre a dinâmica longitudinal e avaliação de quais parâmetros do modelo contribuem para o aparecimento do escorregamento. A compreensão destas relações facilita um projeto de controlador de potência que previna o escorregamento no contato roda/trilho mantendo níveis de conforto longitudinal adequados para os passageiros. A modelagem foi realizada considerando acoplamentos mola/amortecedor lineares, tração elétrica com motores CC lineares, modelo linear para mecânica no contato roda/trilho e forças resistivas ao movimento. O equacionamento utilizou a abordagem de espaço de estados e o modelo foi simulado no software Scilab. A inserção de um sistema de tração elétrica linear levou a uma limitação da velocidade final do trem como um corpo rígido, devido ao efeito de saturação do motor CC. Considerando a mecânica no contato roda/trilho verificou-se o surgimento de uma região de perda da aderência entre as velocidades translacional e circunferencial na roda com a saturação da força no contato e rápido aumento do escorregamento que levou ao distanciamento entre as curvas de potência fornecida pelos motores e de potência útil no movimento longitudinal do vagão caracterizando queda no rendimento do sistema de tração. Considerando as forças resistivas ao movimento observou-se que contribuem para o aumento da perda de aderência e por limitarem a velocidade final do trem. A partir destes montou-se o modelo completo do trem como proposto que mostrou que a perda de aderência é sensível a taxa de fornecimento de tensão aos motores e a inércia translacional do sistema.

Palavras-chave: Modelagem dinâmica. Trem de alta velocidade. Tração elétrica. Mecânica de contato. Escorregamento.

ABSTRACT

This work aimed to model the longitudinal dynamic of a high speed train with particular attention to the electric drive system and the mechanic on the wheel/rail contact, to investigate the influence of slip on the longitudinal dynamic and evaluate how the model parameters affect the arising of slip. The understanding of these behaviors eases the power controller design to avoid slip at the wheel/rail contact keeping acceptable levels of passenger comfort. The modeling was carried out considering linear spring/damper couplings, electric drive with linear DC motors, linear behavior for the mechanics at the wheel/rail contact and propulsion resistance forces. To equate the system one was used the state-space approach and the model was simulated in the software Scilab. The adoption of a linear electric drive led to a limitation of the rigid body train top speed, due to the saturation behavior of a DC motor. Considering the mechanics at the wheel/rail contact one verified the adhesion lost between the translational and rotational wheel velocities with the saturation of the contact force and fast increasing of slip which led to a distancing between the curves of mechanical power supplied by the motors and the net longitudinal power, characterizing lower efficiency of the drive system. Considering the propulsion resistance forces one was seen they contribute to increase the slip and to limit the train top speed. From these models it was built the final model as aimed that shows that the adhesion lost is sensible to the tension supply rate and to the translational system inertia.

Keywords: Dynamic modeling. High speed train. Electric drive. Contact mechanics. Slip.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Usinagem dos trilhos pela falta de controle de tração em locomotiva.....	2
Figura 2.1 - Modelo físico simplificado de um vagão	3
Figura 2.2 - Cilindro rolando sobre um plano	4
Figura 2.3 - Gráfico da posição no tempo do primeiro vagão no modelo preliminar	8
Figura 2.4 - Gráfico da velocidade no tempo do primeiro vagão no modelo preliminar	8
Figura 2.5 - Gráfico da diferença de posição entre os vagões no tempo no modelo preliminar	9
Figura 2.6 - Gráfico da diferença de velocidade entre os vagões no tempo no modelo preliminar	9
Figura 2.7 - Gráfico no plano complexo dos polos do sistema	11
Figura 2.8 - Modos naturais do modelo preliminar.....	14
Figura 2.9 - Esquema do sistema de tração modelado.....	15
Figura 2.10 - Gráfico da posição no tempo do primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração	20
Figura 2.11 - Gráfico da velocidade no tempo do primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração	21
Figura 2.12 - Gráfico da corrente no motor no tempo do primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração	22
Figura 2.13 - Gráfico do torque pela rotação no motor do primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração	22
Figura 2.14 - Gráfico da potência pela rotação do motor no primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração	23
Figura 2.15 - Gráfico da diferença de posição entre os vagões no tempo no modelo aprimorado com sistema de tração	24
Figura 2.16 - Gráfico da diferença de velocidade entre vagões no tempo no modelo aprimorado com sistema de tração	24
Figura 2.17 - Gráfico da diferença de posição entre os vagões até 100 s no modelo aprimorado com sistema de tração	25

Figura 2.18 - Gráfico no plano complexo dos polos do modelo sem e com motorização	26
Figura 2.19 - Modelos para mecânica no contato roda/trilho (IWNICKI, 2006).....	27
Figura 2.20 - Velocidades translacional e circunferencial do modelo de um vagão com mecânica de contato	30
Figura 2.21 - Escorregamento no modelo de um vagão com mecânica de contato	31
Figura 2.22 - Força no contato roda/trilho no modelo com mecânica de contato	32
Figura 2.23 - Força de contato pelo escorregamento no modelo com mecânica de contato.....	33
Figura 2.24 - Comparação da velocidade dos modelos com mecânica de contato e com hipótese de não escorregamento	34
Figura 2.25 - Potência fornecida pelo motor e útil no modelo de um vagão com mecânica de contato	34
Figura 2.26 - Rendimento no modelo de um vagão com mecânica de contato	35
Figura 2.27 - Gráfico da velocidade do modelo de um vagão com mecânica de contato com entrada de tensão a 50 V/s.	36
Figura 2.28 - Potência do modelo de um vagão com mecânica de contato a uma entrada de tensão a 50 V/s	37
Figura 2.29 - Rendimento do modelo de um vagão com mecânica de contato a uma entrada de tensão a 50 V/s	37
Figura 2.30 - Gráfico da velocidade do modelo de um vagão com sistema de tração, mecânica de contato e forças resistivas	40
Figura 2.31 - Gráfico da corrente do motor do modelo de um vagão com sistema de tração, mecânica de contato e forças resistivas.....	41
Figura 2.32 - Gráfico de potência para um eixo do modelo de um vagão com sistema de tração, mecânica de contato e forças resistivas.....	41

Figura 2.33 - Gráfico da velocidade do primeiro vagão na simulação do modelo completo	45
Figura 2.34 - Gráfico do escorregamento no contato roda/trilho para o primeiro vagão na simulação do modelo completo.....	45
Figura 2.35 - Gráfico da posição relativa entre vagões para o modelo completo	46
Figura 2.36 – Gráfico da força no contato roda/trilho para o primeiro vagão na simulação do modelo completo.....	47
Figura 2.37 - Gráfico da velocidade relativa entre os vagões na simulação do modelo completo	48
Figura 2.38 - Gráfico do escorregamento relativo ao primeiro vagão na simulação do modelo completo	49
Figura 2.39 - Gráfico de potência para o primeiro vagão na simulação do modelo completo	50
Figura 2.40 - Gráfico da velocidade do primeiro vagão na simulação do modelo completo com entrada de tensão a 50V/s.....	51
Figura 2.41 - Gráfico da potência do primeiro vagão na simulação do modelo completo com entrada de tensão a 50V/s.....	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Frequências naturais amortecidas e taxas de decaimento do modelo preliminar	12
Tabela 2.2 - Modos naturais do modelo preliminar (1° ao 4°)	12
Tabela 2.3 - Modos naturais do modelo preliminar (5° ao 8°)	13
Tabela 2.4 - Frequências naturais amortecidas e taxas de decaimento do modelo aprimorado com sistema de tração	26

ÍNDICE

1	Introdução	1
2	Modelagem e simulação	3
2.1	Modelagem preliminar	3
2.1.1	Simulação e análise	7
2.1.2	Frequências e modos naturais de vibração	10
2.2	Aprimoramento do modelo	15
2.2.1	Sistema de tração	15
2.2.2	Mecânica do contato roda/trilho	27
2.3	Forças resistivas ao movimento	38
2.4	Modelo completo	42
2.4.1	Simulação e análise	44
3	Conclusão	52
4	Referências bibliográficas	55
5	Anexos	56

1 INTRODUÇÃO

O presente texto apresenta as atividades realizadas durante as disciplinas PME 2598/2599/2600 – Projeto Integrado I/II/III do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo representando o trabalho de conclusão de curso para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Após anos de sucateamento, o setor ferroviário brasileiro volta a ter representatividade no país tanto no transporte de cargas como no de passageiros. A maioria dos investimentos é de origem privada como ocorre com a concessão de ferrovias para transporte de cargas com a empresa Vale. Mas nos últimos anos investimentos em parcerias governo/privadas estão sendo aplicados no transporte ferroviário de passageiros, como o caso do projeto de expansão do sistema metroviário da cidade de São Paulo e a inserção de uma linha com trens de alta velocidade (TAV) ligando principalmente as cidades de São Paulo e Rio de Janeiro.

Muito se fala e se discute sobre a viabilidade financeira da inserção do TAV no Brasil. Mas é certo que se for realizada trará um novo leque de tecnologias para o país que necessitará de profissionais capacitados para trabalhar em conjunto com os profissionais da concessionária do serviço. O trem de alta velocidade é um equipamento que demanda alta tecnologia para seu desenvolvimento e manutenção, tanto nos trens como nas vias.

A definição europeia (YANASE, 2010) caracteriza o trem de alta velocidade como um veículo de segurança garantida e viagens ininterruptas a uma velocidade de no mínimo 250 km/h para linhas construídas especialmente para alta velocidade e permitindo que velocidades em torno de 300 km/h sejam atingidas em circunstâncias apropriadas.

Diferentemente dos trens de carga que possuem uma única locomotiva à frente, o TAV possui tração distribuída ao longo do trem, vagões com tração e vagões sem tração. A potência é fornecida de dois modos principais, um deles são os chamados trens de tração elétrica onde ocorre captação de energia elétrica por via aérea (catenária e pantógrafo) ou por via terrestre (terceiro trilho) e então transformada em potência mecânica por motores elétricos; o outro são os trens de tração diesel-elétrica onde um ou mais motores a diesel acionam um gerador elétrico que gera energia elétrica e esta é distribuída de forma semelhante aos trens de tração elétrica.

Dados comerciais do TAV Velaro® CN da Siemens informam que seu peso sem passageiros é de 447 tf e fornece 8,8 GW de potência. Por ser um veículo pesado e longo, a distribuição de potência e, portanto tração deve ser controlada de modo ativo sobre os diversos carros do trem de modo a não sobrecarregar os engates ou a evitar o escorregamento das rodas em relação ao trilho que leva a perda de desempenho do trem e degradação da via que em casos extremos onde um ou mais carros ultrapassam o limite de tração os trilhos chegam a ser usinados pelas rodas como ilustra a figura abaixo.

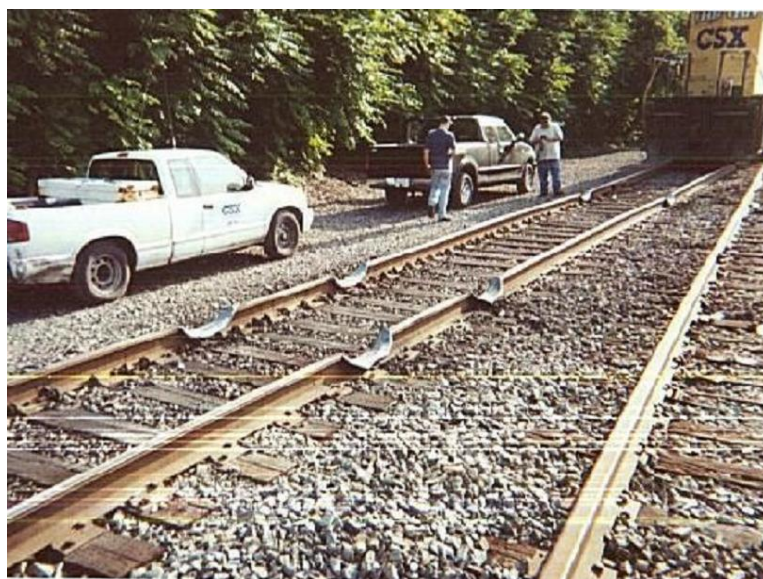


Figura 1.1 - Usinagem dos trilhos pela falta de controle de tração em locomotiva

Conclui-se que é de extrema importância a utilização de controladores de tração no TAV que evitem o escorregamento no contato roda/trilho, e sua importância no desenvolvimento do país e de seu sistema de transporte de passageiros. E para realizar um projeto de controlador consistente é preciso antes compreender a fundo o comportamento do sistema a ser controlado sendo este então adotado como objetivo principal deste trabalho de conclusão de curso.

O trabalho visa modelar a dinâmica longitudinal de um trem de alta velocidade, tratando desde os motores, passando para a transmissão do torque, contato roda/trilho, engates até o desempenho do trem completo pela abordagem de espaço de estados. E através de simulações computacionais no software Scilab deste modelo compreender os efeitos do escorregamento no contato roda/trilho sobre a dinâmica longitudinal e como os parâmetros do sistema influenciam no aparecimento do escorregamento.

2 MODELAGEM E SIMULAÇÃO

Um trem de alta velocidade é um sistema complexo composto por diversos componentes cada qual com seu comportamento particular. Isso dificulta uma modelagem direta do sistema completo e por tanto se decidiu por iniciar com uma modelagem preliminar, que consiste de um modelo simplificado do trem desconsiderando certos componentes e características, e então aprimorá-lo inserindo modelos mais realistas do funcionamento dos componentes e mesmo componentes antes desconsiderados.

2.1 Modelagem preliminar

No modelo preliminar considerou-se um conjunto de n vagões, com m vagões motorizados (que tracionam) e $n-m$ vagões não motorizados (que são tracionados), com as seguintes simplificações:

- Os acoplamentos entre vagões foram modelados sem folgas como dispositivos mola/amortecedor lineares e idênticos;
- As forças resistivas ao movimento foram desconsideradas;
- Não há escorregamento no contato roda/trilho;
- Todos os eixos de um mesmo vagão motor possuem o mesmo torque, assim como todos os vagões motores possuem o mesmo torque;
- O modelo sendo de dinâmica longitudinal os torques foram avaliados como forças trativas longitudinais.

Considerando um vagão qualquer i , temos:

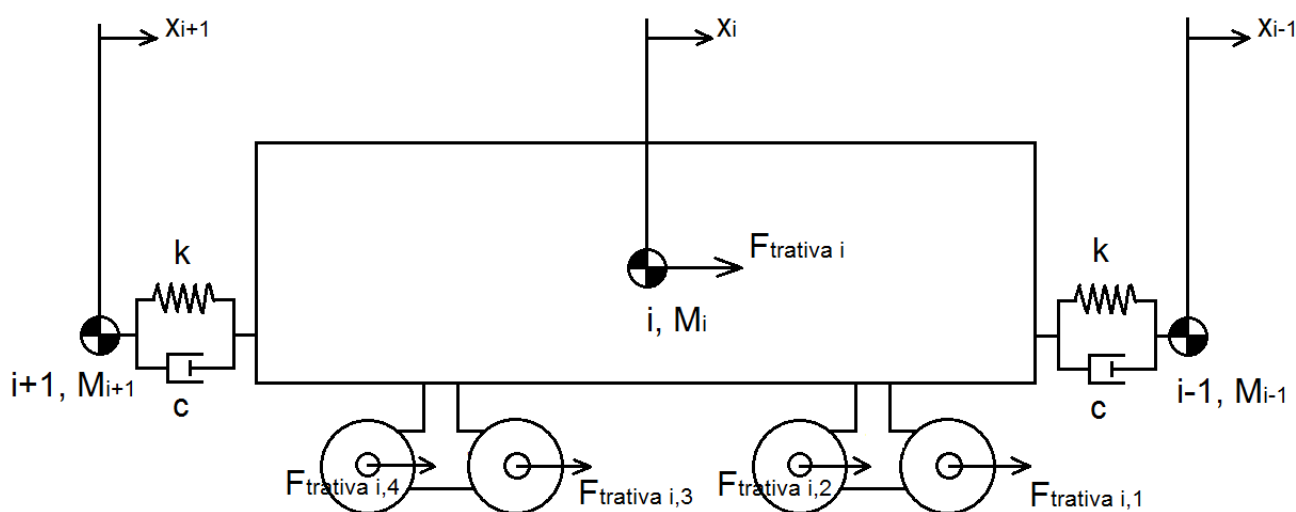


Figura 2.1 - Modelo físico simplificado de um vagão

As forças trativas aplicadas a cada eixo são computadas como uma única força aplicada ao vagão i .

$$F_{trativa\ i} = F_{trativa\ i,1} + F_{trativa\ i,2} + F_{trativa\ i,3} + F_{trativa\ i,4}$$

Aplicando-se o Teorema do Movimento do Baricentro para o vagão i temos:

$$\sum F_i = M_i \cdot \ddot{x}_i$$

$$F_{trativa\ i} + k(x_{i+1} - x_i) - k(x_i - x_{i-1}) + c(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) - c(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) = M_i \cdot \ddot{x}_i$$

$$M_i \cdot \ddot{x}_i = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + c(\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1}) + F_{trativa\ i}$$

A equação acima descreve o movimento de um vagão genérico i . No caso do primeiro e último vagões a equação toma a forma:

- Primeiro vagão:

$$M_1 \cdot \ddot{x}_1 = k(-x_1 + x_2) + c(-\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + F_{trativa\ 1}$$

- Último vagão:

$$M_n \cdot \ddot{x}_n = k(x_{n-1} - x_n) + c(\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n) + F_{trativa\ n}$$

A massa M_i de um vagão i foi considerada como a massa translacional do vagão mais a inércia dos rodeiros transformada em massa translacional.

Considere um cilindro, massa m e inércia J , rolando sem escorregar sobre um plano como ilustra a figura abaixo.

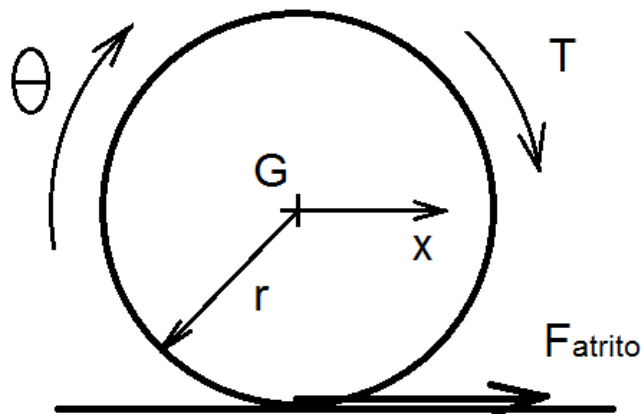


Figura 2.2 - Cilindro rolando sobre um plano

Neste cilindro há um torque T sendo aplicado e, para que o cilindro role, existe uma força de atrito em contrapartida. Aplicando o Teorema do Momento Angular no plano deste cilindro, temos:

$$\sum M_G^{ext} = \dot{\omega} \cdot J_G, \quad \omega = \dot{\theta}$$

$$T - F_{atrito} \cdot r = \dot{\omega} \cdot J_G$$

Onde J_G é o momento de inércia do cilindro com relação ao seu eixo de rotação. Aplicando o Teorema do Movimento do Baricentro, temos:

$$F_{atrito} = m \cdot \ddot{x}$$

E considerando que não há escorregamento entre o cilindro e o plano:

$$\dot{\omega} \cdot r = \ddot{x}$$

Igualando as equações pela força de atrito e inserindo a hipótese de não escorregamento, temos:

$$\frac{T - \frac{\ddot{x}}{r} \cdot J_G}{r} = m \cdot \ddot{x}$$

$$\left(m + \frac{J_G}{r^2}\right) \ddot{x} = \frac{T}{r}, \quad \frac{T}{r} = F_{trativa}$$

Verifica-se que inércia do cilindro aumenta a massa translacional do mesmo pela relação do seu raio ao quadrado.

Do mesmo modo, considerou-se a inércia dos quatro rodeiros do vagão, de modo que a massa equivalente do vagão i , M_{ei} , é dada por:

$$M_{ei} = M_i + \frac{J_{rodeiro}}{r_{roda}^2}$$

E a equação do movimento de um vagão i passa a ser:

$$M_{ei} \cdot \ddot{x}_i = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + c(\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1}) + F_{trativa i}$$

$$\left(M_i + \frac{J_{rodeiro}}{r_{roda}^2}\right) \cdot \ddot{x}_i = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + c(\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1}) + F_{trativa i}$$

O sistema de equações de um trem de n vagões pode ser descrito na forma matricial como:

$$[M_e]\{\ddot{x}\} = [K_x]\{x\} + [C_x]\{\dot{x}\} + \{F\}$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} M_{e1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{e2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{en} \end{bmatrix}, \{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}, \{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}, \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

$$[K_x] = \begin{bmatrix} -k & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k & -2k & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & -2k & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k & -k \end{bmatrix},$$

$$[C_x] = \begin{bmatrix} -c & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & -2c & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & -2c & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & -c \end{bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{trativa1} \\ \vdots \\ F_{trativan} \end{Bmatrix}$$

Além da forma matricial apresentada acima, o sistema dinâmico pode ser descrito pela abordagem de espaço de estados onde um sistema de equações diferenciais de ordem n é reduzido para um de primeira ordem.

Definindo o vetor de estados $\{y\}$:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{Bmatrix}$$

O sistema então pode ser escrito como:

$$\{\dot{y}\} = A\{y\} + B\{u\}$$

$$\{X\} = C\{y\} + D\{u\}$$

Onde $\{u\}$ é o vetor de entradas do sistema e é igual ao vetor $\{F\}$, $\{X\}$ é o vetor de saída do sistema, as matrizes A e B descrevem o comportamento dinâmico do sistema e as matrizes C e D descrevem a observação do sistema, ou seja, a leitura dos estados de interesse.

Nesta abordagem o sistema de equações de movimento do TAV de n vagões fornece as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ M_e^{-1} K_x & M_e^{-1} C_x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ M_e^{-1} \end{bmatrix}, C = [I_{2n \times 2n}], D = [0_{2n \times n}]$$

Onde $0_{n \times n}$ é uma matriz nula de ordem n por n , $I_{n \times n}$ é uma matriz identidade de ordem n por n .

Pela simplicidade, a abordagem de estados foi a escolhida para a simulação do sistema.

2.1.1 Simulação e análise

O sistema matricial de estados do modelo preliminar foi implementado no software Scilab. O programa foi montado de modo que se possa mudar o número de vagões, suas massas e quais destes são motorizados ou não.

As características do sistema, necessárias para a simulação, foram obtidas em *datasheets* de veículos existentes no mercado, em específico do Velaro CN (SIEMENS AG, 2008) e de trabalhos como (BARBOSA, 1993).

O trem de alta velocidade simulado possui as seguintes características:

- Número de vagões: 8;
- Massa de cada vagão: 50000 kg (vagões idênticos);
- Inércia do rodeiro: 145 kg.m²;
- Constante elástica do acoplamento: 1e6 N/m;
- Constante de amortecimento do acoplamento: 1e5 N.s/m;
- Raio da roda: 0,5 m;
- Vagões motorizados: 1, 3, 6 e 8.

Como entrada do sistema foi aplicada uma força trativa equivalente a um torque constante de 10000 N.m em cada eixo motor. Como condição inicial considerou-se todos os vagões em repouso e os acoplamentos distendidos. Avaliou-se o comportamento do sistema durante 10 segundos.

Uma comparação direta das posições e velocidades dos vagões não se mostra eficaz para a visualização do comportamento do trem devido às pequenas diferenças existentes. Por tanto, se avaliou a posição e velocidade do primeiro carro e as posições e velocidades dos demais carros em relação ao carro antecessor. Devido à simetria do sistema avaliado o comportamento observado entre os carros 1 e 2, e 3 e 4 é o mesmo, de modo que apenas o comportamento entre 1 e 2 foi plotado. O mesmo ocorre entre os carros 5 e 6, e 7 e 8, sendo plotado apenas o comportamento entre 7 e 8.

Nas Figura 2.3 e Figura 2.4 observamos o comportamento do primeiro vagão. Verifica-se que ele possui uma aceleração constante, com pequena oscilação ao longo dos primeiros segundos, com gráfico de velocidade linear e de posição parabólico. Este comportamento é o esperado para um sistema submetido a uma força constante.

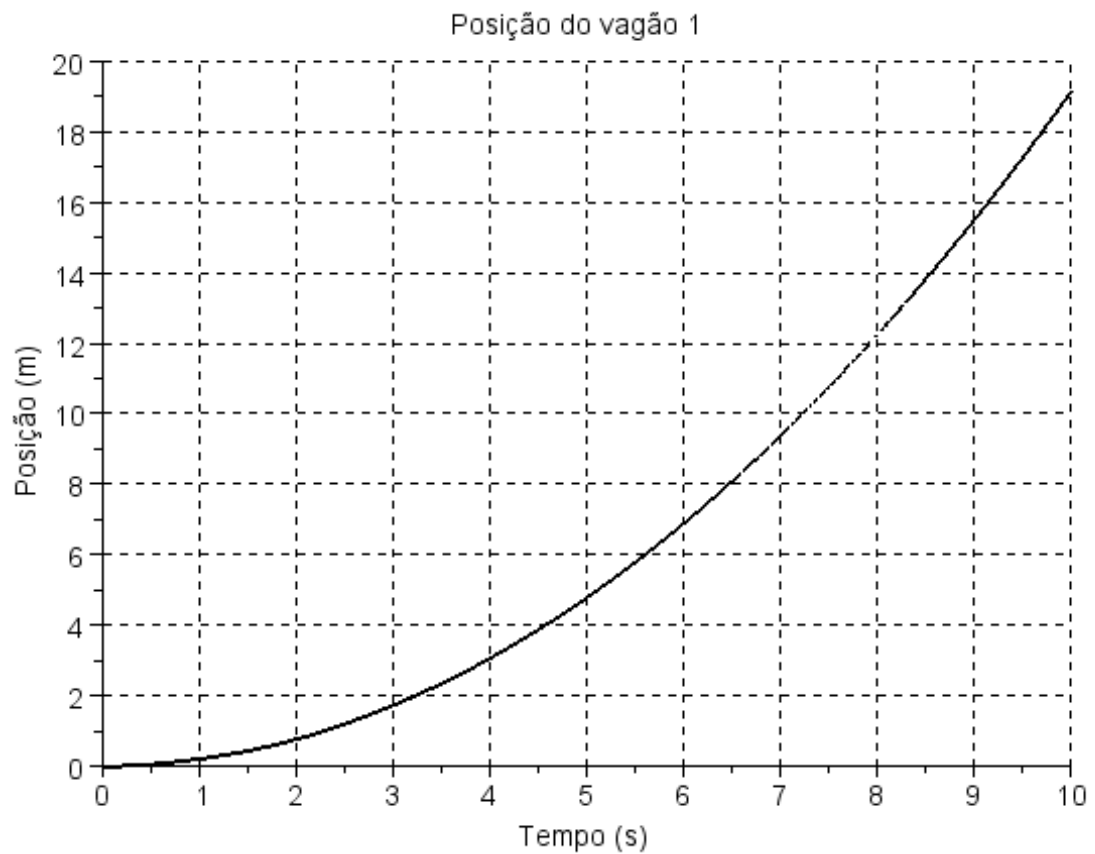


Figura 2.3 - Gráfico da posição no tempo do primeiro vagão no modelo preliminar

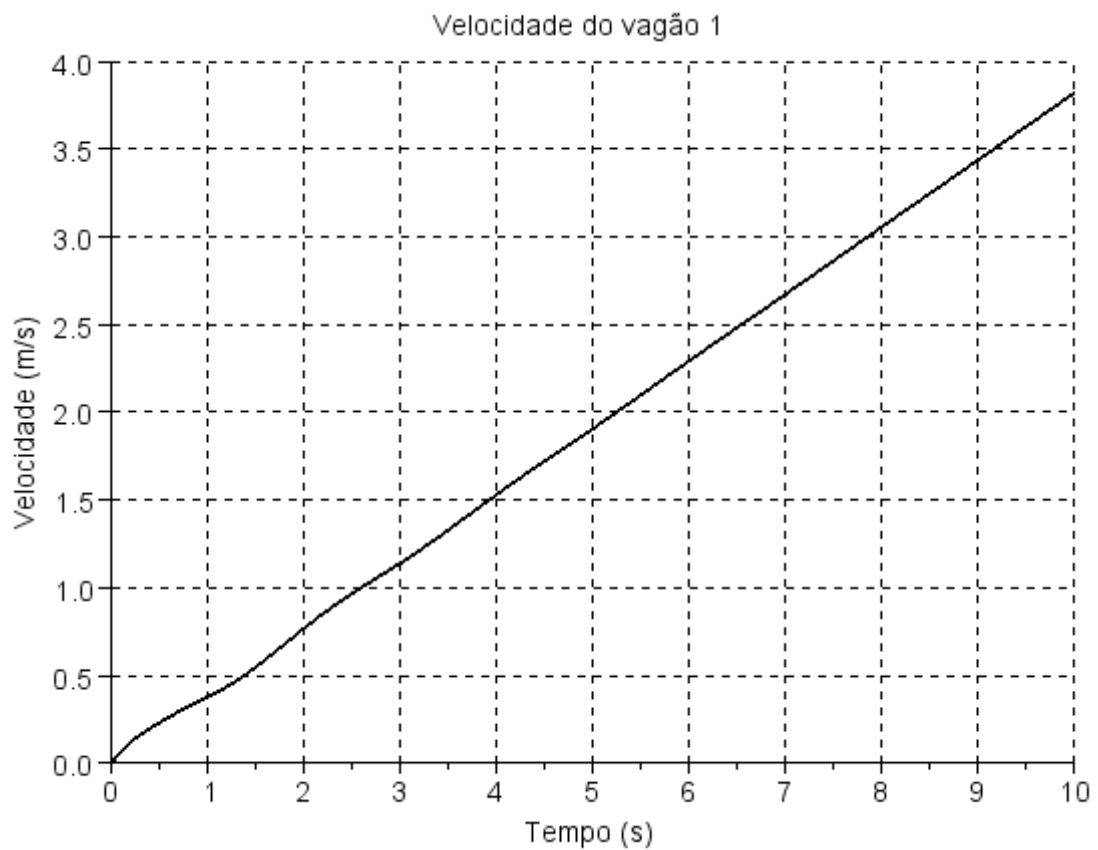


Figura 2.4 - Gráfico da velocidade no tempo do primeiro vagão no modelo preliminar

Para o comportamento relativo temos:

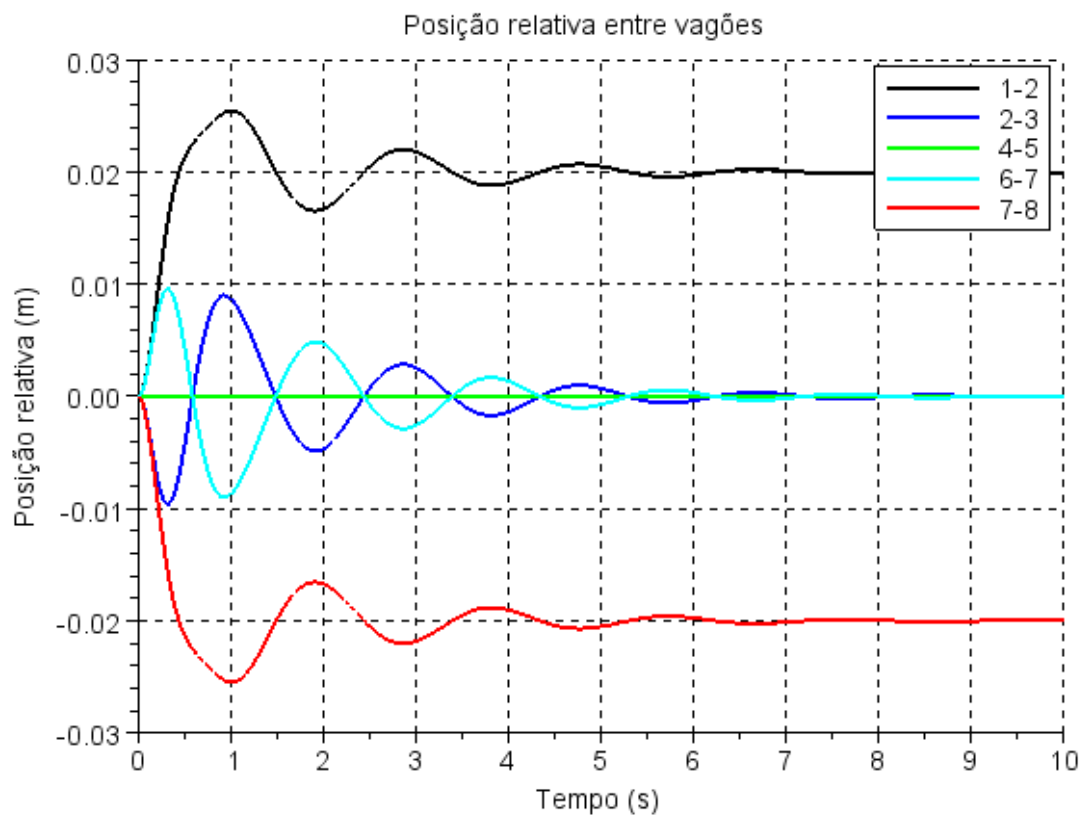


Figura 2.5 - Gráfico da diferença de posição entre os vagões no tempo no modelo preliminar

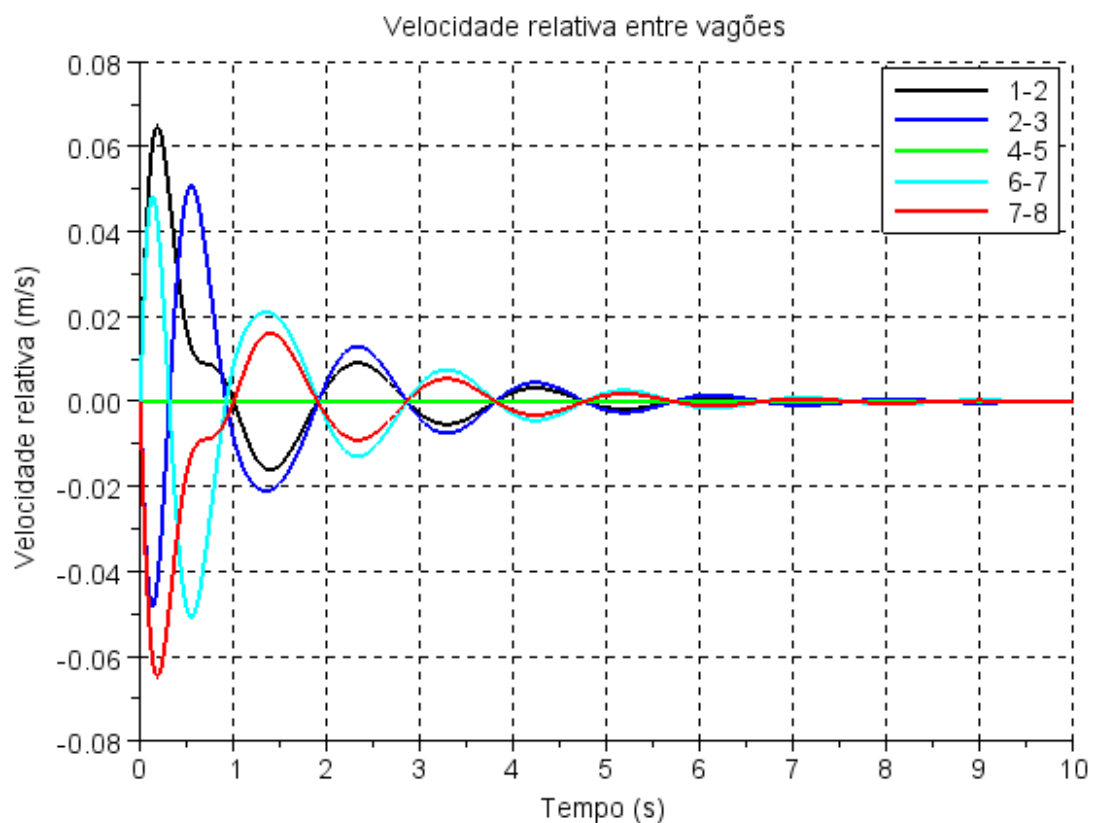


Figura 2.6 - Gráfico da diferença de velocidade entre os vagões no tempo no modelo preliminar

Verifica-se que, devido à simetria do sistema simulado, o comportamento relativo (posição e velocidade) entre a primeira metade dos vagões é o oposto do comportamento da segunda, e sendo assim é nulo entre os vagões centrais.

Entre os vagões 1 e 2, e 7 e 8 (por semelhança 3 e 4, e 5 e 6) observa-se uma condição de equilíbrio em suas posições não nula, enquanto que nos demais acoplamentos esta condição de equilíbrio é nula. Este efeito se dá pela diferença de desempenho da parcela à frente e atrás do acoplamento. Considerando-se o acoplamento entre 1 e 2 tem-se à frente do acoplamento uma motorização para um carro e atrás se tem três motorizações para sete carros, levando a uma diferença de desempenho. Já no acoplamento entre 2 e 3 tem-se à frente uma motorização para dois carros e atrás se tem três motorizações para seis carros, equilibrando o desempenho das partes.

A condição de equilíbrio para a velocidade relativa é nula representando o trem se movimentado como um corpo rígido com aceleração constante.

2.1.2 Frequências e modos naturais de vibração

Além da análise dinâmica do modelo no domínio do tempo, pode-se realizar uma análise no domínio da frequência. Uma forma de realizar tal análise é pelas frequências e modos de vibrar do sistema.

Um sistema dinâmico com k graus de liberdade vai possuir também k frequências naturais de oscilação, cada qual associada com um modo natural específico. Os modos naturais de um sistema são as formas como o sistema tende naturalmente a responder quando submetido a uma perturbação. O conjunto dos k modos naturais forma a base que descreve qualquer comportamento temporal do sistema, ou seja, todo comportamento pode ser decomposto em uma combinação linear dos comportamentos nos modos naturais.

Quando um sistema é excitado externamente a uma frequência ω idêntica a uma de suas frequências naturais então todas as variáveis de estado $\{X\}=\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ irão vibrar nesta mesma frequência. A forma como as amplitudes de oscilação de cada uma das variáveis de estado tomam nesta vibração $\{a\}=\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ definem o modo natural de vibração associado à frequência natural. Deste modo, tomando as variáveis de estado na forma:

$$\{X\} = \{a\}e^{\lambda t}$$

Onde λ é um número complexo.

Podemos obter a derivada como:

$$\{\dot{X}\} = \lambda \{a\} e^{\lambda t}$$

Pela equação de espaço de estados não forçada:

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\}$$

$$\lambda \{a\} e^{\lambda t} = [A]\{a\} e^{\lambda t}$$

Tal relação independe do tempo de modo que se obtém:

$$([A] - [I]\lambda)\{a\} = 0$$

Recaindo sobre o problema de autovalores e autovetores da matriz A com λ o autovalor da matriz e $\{a\}$ o autovetor associado. Através do software Scilab avaliaram-se tais valores para o modelo preliminar. Os valores são apresentados a seguir graficamente no plano complexo.

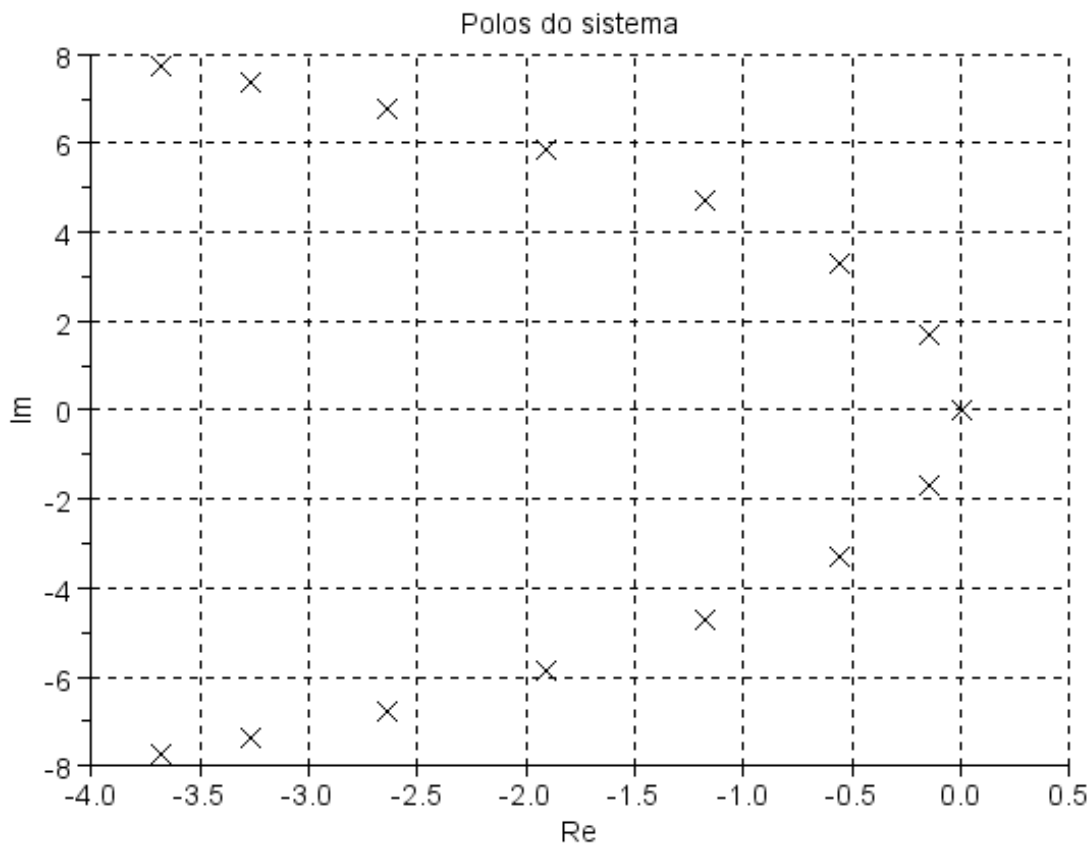


Figura 2.7 - Gráfico no plano complexo dos polos do sistema

Do modo como foi montado o problema, os autovalores aparecem como conjugados complexos nos quais a parte imaginária representa a frequência natural amortecida enquanto a parte real representa a taxa de decaimento do modo de vibrar associado a esta frequência natural.

Verifica-se que todos os polos do sistema tem sua parte real negativa representando um decaimento dos modos associados o que nos diz que o sistema é estável. O par de polos nulos, frequência natural nula e sem decaimento, representa o movimento do trem como um corpo rígido único.

A tabela abaixo apresenta as frequências naturais e as taxas de decaimento associadas.

Tabela 2.1 - Frequências naturais amortecidas e taxas de decaimento do modelo preliminar

Modo	Frequência (Hz)	Taxa de decaimento (1/s)
1°	0,000	0
2°	0,270	0,145
3°	0,525	0,560
4°	0,749	1,180
5°	0,935	1,911
6°	1,077	2,643
7°	1,176	3,263
8°	1,233	3,677

Assim como as frequências naturais, os modos de vibrar também são formados por complexos conjugados. No entanto apenas a parcela real da oscilação tem sentido físico e esta é obtida pelo módulo do complexo e sinal da parte complexa. Os modos naturais foram calculados e estão apresentados na tabela abaixo.

Tabela 2.2 - Modos naturais do modelo preliminar (1° ao 4°)

Vagão	Modo			
	1°	2°	3°	4°
1	0,353	-0,490	-0,462	0,416
2	0,353	-0,416	-0,191	-0,097
3	0,353	-0,278	0,191	-0,490
4	0,353	-0,097	0,462	-0,278
5	0,353	0,097	0,462	0,278
6	0,353	0,278	0,191	0,490
7	0,353	0,416	-0,191	0,097
8	0,353	0,490	-0,462	-0,416

Tabela 2.3 - Modos naturais do modelo preliminar (5° ao 8°)

Vagão	Modo			
	5°	6°	7°	8°
1	-0,353	-0,278	0,191	0,097
2	0,353	0,490	-0,462	-0,278
3	0,353	-0,097	0,462	0,416
4	-0,353	-0,416	-0,191	-0,490
5	-0,353	0,416	-0,191	0,490
6	0,353	0,097	0,462	-0,416
7	0,353	-0,490	-0,462	0,278
8	-0,353	0,278	0,191	-0,097

Os modos naturais podem ser mais facilmente compreendidos de forma gráfica nos histogramas apresentados a seguir.

Através da análise dos modos naturais de vibrar do sistema também é possível visualizar o comportamento simétrico do modelo. Verifica-se em todos os modos de vibrar, com exceção do primeiro que representa o modo degenerado de movimento de corpo rígido, as mesmas amplitudes de oscilação para o primeiro e último, segundo e sétimo, terceiro e sexto, e quarto e quinto.

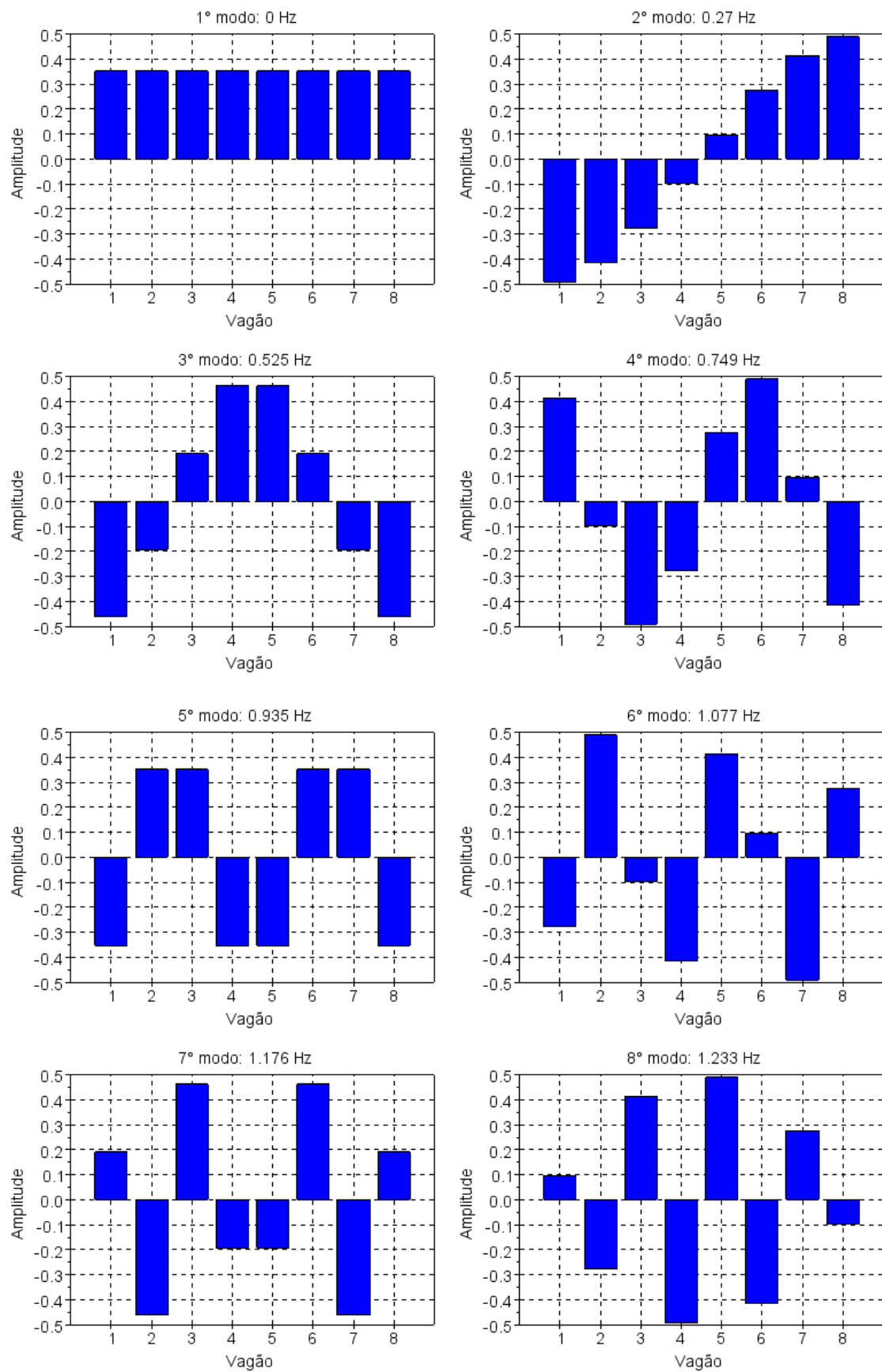


Figura 2.8 - Modos naturais do modelo preliminar

2.2 Aprimoramento do modelo

Sendo o objetivo deste trabalho a compreensão da dinâmica longitudinal quando submetida aos efeitos no contato roda/trilho, para possibilitar um controle de tração consistente com o comportamento real, é importante que tanto o sistema de tração seja modelado quanto a mecânica no contato roda/trilho. A consideração das forças resistivas trará efeitos adicionais de importância na dinâmica e no aparecimento do escorregamento.

2.2.1 Sistema de tração

Os trens de alta velocidade em sua maioria possuem tração elétrica alimentada por via aérea, catenária, em redes de 25kV AC, corrente alternada. A energia é captada através de um pantógrafo para o sistema elétrico do trem e passa por um transformador para baixar a voltagem a níveis de uso nos motores. Se o sistema de tração, como o modelado aqui, utiliza motores de corrente contínua (CC), a corrente ainda passa por um retificador que realiza a conversão de corrente alternada para corrente contínua para que ocorra a alimentação do motor (Railway Technical Web Pages).

O sistema de tração modelado aqui considera o motor CC, tendo como entrada a tensão na armadura do motor e a transmissão do torque para as rodas através de uma redução por engrenagens. A Figura 2.9 apresenta um esquema do modelo proposto.

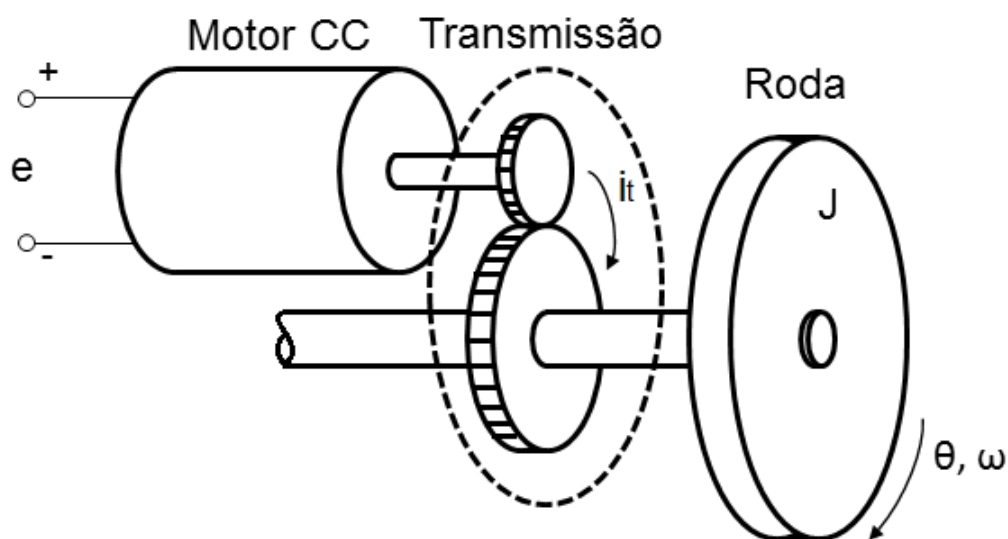


Figura 2.9 - Esquema do sistema de tração modelado

Na modelagem do sistema de tração foram tomadas as seguintes considerações (FRIEDLAND, 2005):

- O sistema é alimentado por uma tensão 'e' aplicada na armadura do motor;
- O torque do motor 'T' é proporcional a corrente 'i' na armadura do motor;
- A tensão induzida 'v' sobre a armadura é proporcional à velocidade angular do motor 'ω';
- A resistência da armadura do motor é 'R';
- A relação de transmissão nas engrenagens é 'i_t';
- A carga acionada possui inércia rotativa 'J';

Deste modo temos:

$$T = K_1 \cdot i_m$$

$$v = K_2 \cdot \omega_m$$

Aplicando a Lei de Ohm na armadura do motor:

$$e - v = R \cdot i_m$$

Aplicando o Teorema do Momento Angular na carga:

$$T_{roda} = T \cdot i_t = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = J \cdot \ddot{\theta}$$

Fazendo as substituições:

$$J \cdot \ddot{\theta} = T \cdot i_t = K_1 \cdot i_m \cdot i_t = K_1 \cdot \frac{(e - v)}{R} \cdot i_t = \frac{K_1 e i_t}{R} - \frac{K_1 K_2 \omega_m i_t}{R}$$

$$J \cdot \ddot{\theta} = \frac{K_1 i_t}{R} \cdot e - \frac{K_1 K_2 i_t^2}{R} \cdot \dot{\theta}$$

O sistema pode ser apresentado no espaço de estados como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K_1 K_2 i_t^2}{JR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1 i_t}{JR} \end{bmatrix} \cdot e$$

Para introdução deste modelo do sistema de tração no trem recorreremos à equação anteriormente apresentada na modelagem preliminar que expressa a dinâmica longitudinal de um cilindro rolando sem escorregamento:

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right) \ddot{x} = \frac{T_{roda}}{r}$$

Inserindo a expressão do torque na roda, apresentada acima, nesta equação obtemos:

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right) \ddot{x} = \frac{K_1 i_t}{Rr} \cdot e - \frac{K_1 K_2 i_t^2}{Rr} \cdot \dot{\theta}$$

Se não há o escorregamento,

$$\dot{\theta} \cdot r = \dot{x}$$

E por fim,

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right) \ddot{x} = M \ddot{x} = \frac{K_1 i_t}{Rr} \cdot e - \frac{K_1 K_2 i_t^2}{Rr^2} \cdot \dot{x}$$

A representação desta equação no espaço de estados fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K_1 K_2 i_t^2}{MRr^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1}{MRr} \end{bmatrix} \cdot e$$

Verifica-se que o modelo do sistema de tração interfere na matriz C_c dos amortecimentos, pois se relaciona com \dot{x} , e na matriz B das entradas, que agora passam a ser a tensão na armadura do motor.

Para aplicação do sistema de tração no modelo do trem considerou-se que cada carro motorizado possui quatro motores, cada qual ligado a um eixo, todos os motores são idênticos e são alimentados pela mesma tensão.

Deste modo a equação de espaço de estados do problema passa a ser:

$$\{\dot{y}\} = A\{y\} + B\{u\}$$

$$\{X\} = C\{y\} + D\{u\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ M_e^{-1} K_x & M_e^{-1} (C_x + C_\theta) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ M_e^{-1} B_\theta \end{bmatrix}, C = [I_{2n \times 2n}], D = [0_{2n \times n}]$$

Onde as matrizes C_m e E são diagonais e representam quais carros são motorizados ou não. Por exemplo, considerando um trem de três vagões onde o primeiro e o último vagões são motorizados as matrizes serão:

$$C_\theta = \begin{bmatrix} -\frac{4K_1 K_2 i_t^2}{Rr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4K_1 K_2 i_t^2}{Rr^2} \end{bmatrix}, B_\theta = \begin{bmatrix} \frac{4K_1}{Rr} \\ 0 \\ \frac{4K_1}{Rr} \end{bmatrix}$$

A partir das variáveis de estados obtidas pela resolução do sistema acima exposto podemos reconstruir as variáveis derivadas do sistema de tração utilizando as equações inicialmente citadas, partindo de:

$$\omega_m = \dot{\theta} \cdot i_t = \dot{x} \cdot r \cdot i_t$$

E chegando ao torque do motor na forma:

$$T_m = \frac{K_1}{R} (e - K_2 \omega_m)$$

Para uma entrada constante de tensão devemos observar uma relação linear decrescente entre o torque do motor e sua velocidade angular, fornecendo seu máximo torque quando a velocidade angular é nula levando a:

$$T_{m,max} = \frac{K_1 e}{R}$$

Como o torque do motor é sempre positivo para uma entrada de tensão positiva verificamos também que a velocidade angular máxima desenvolvida pelo motor é dada por:

$$\omega_{m,max} = \frac{e}{K_2}$$

A potência elétrica consumida da rede pode ser obtida por:

$$P_e = e \cdot i_m = e \cdot \frac{e - v}{R} = \frac{e}{R} (e - K_2 \omega_m)$$

Neste caso a máxima potência consumida também ocorre quando a velocidade angular é nula e é dada por:

$$P_{e,max} = \frac{e^2}{R}$$

A potência mecânica, no entanto é avaliada através de:

$$P_m = \omega_m T_m = \omega_m \frac{K_1}{R} (e - K_2 \omega_m) = \frac{K_1}{R} (e \omega_m - K_2 \omega_m^2)$$

Revelando uma dependência quadrática com a velocidade angular do motor. Sendo assim a potência máxima passa ocorrer à metade da velocidade angular máxima, e logo a potência mecânica máxima fornecida é:

$$P_{m,max} = \frac{K_1}{R} \left(e \frac{e}{2K_2} - K_2 \left(\frac{e}{2K_2} \right)^2 \right) = \frac{K_1 e^2}{4K_2 R}$$

Podemos então avaliar o rendimento do motor como:

$$\eta_m = \frac{P_m}{P_e} = \frac{\omega_m \frac{K_1}{R} (e - K_2 \omega_m)}{\frac{e}{R} (e - K_2 \omega_m)} = \frac{\omega_m K_1}{e}$$

O máximo rendimento do motor ocorre então quando este atinge sua máxima velocidade angular:

$$\eta_{m,max} = \frac{\frac{e}{K_2} K_1}{e} = \frac{K_1}{K_2}$$

Vemos que o máximo rendimento do motor depende de as constantes que determinam a proporcionalidade do torque e da tensão induzida. Teoricamente as leis físicas que regem o aparecimento do torque no motor devido a corrente em um campo magnético são as mesmas que regem o aparecimento da tensão induzida em um condutor se movimentando em um campo magnético, elas trabalham como ação e reação e logo as constantes K_1 e K_2 são as mesmas para um sistema ideal (WILDI, 1997).

No entanto, do modo como modelamos a constante K_1 representa não somente o efeito eletromagnético como os efeitos mecânicos do motor. Para acelerar o motor, ou seja, fornecer velocidade angular, o torque eletromagnético deve vencer o torque resistente de atrito nos mancais internos do motor e logo o torque resultante fornecido é menor. Para efeitos de modelagem então tomamos um valor de K_1 menor que de K_2 , neste trabalho consideramos um rendimento mecânico do motor de 90% e logo $K_1=0,9K_2$.

Como os parâmetros internos dos motores, K_1 , K_2 e R , não são encontrados facilmente, as equações dos valores máximos ajudam a obter tais valores a partir de valores comumente divulgados como potência máxima, velocidade angular máxima e tensão fornecida.

2.2.1.1 Simulação e análise

O sistema matricial de estados do modelo aprimorado com sistema de tração elétrico foi implementado no software Scilab e o programa encontra-se no ANEXO A. Para efeitos de comparação foram utilizados os mesmos parâmetros básicos da simulação do modelo preliminar.

Para obter os parâmetros do sistema de tração vamos considerar o trem de alta velocidade Siemens Velaro CN (SIEMENS AG, 2008), ainda que ele seja composto por motores de corrente alternada, os valores máximos são aplicados ao modelo com motor de corrente contínua gerando uma motorização equivalente. Ele possui potência mecânica máxima de 8,8 MW distribuída em 16 motores (550 kW por motor), os motores chegam a 4000 rpm, são alimentados por tensão de 1500 Vcc e possuem sistema de redução de relação 2:1.

Pela velocidade angular máxima temos:

$$\omega_{m,max} = 4000 \text{ rpm} = 420 \text{ rad/s} = \frac{e}{K_2} \rightarrow K_2 = \frac{1500}{420} = 3,6 \text{ V.s/rad}$$

Tomando o rendimento mecânico do motor temos que:

$$K_1 = 0,9K_2 = 0,9 \cdot 3,6 = 3,24 \text{ N.m/A}$$

Pela potência mecânica máxima:

$$P_{m,max} = 550 \text{ kW} = \frac{K_1 e^2}{4K_2 R} \rightarrow R = \frac{3,24 \cdot 1500^2}{4 \cdot 3,6 \cdot 550000} = 0,9 \Omega$$

O modelo foi simulado durante 500 s sob uma entrada de tensão constante de 695 V. Essa tensão fornece torque inicial aos eixos equivalente a força trativa implementada no modelo preliminar a fim de possibilitar a comparação entre eles.

Temos para o primeiro vagão:

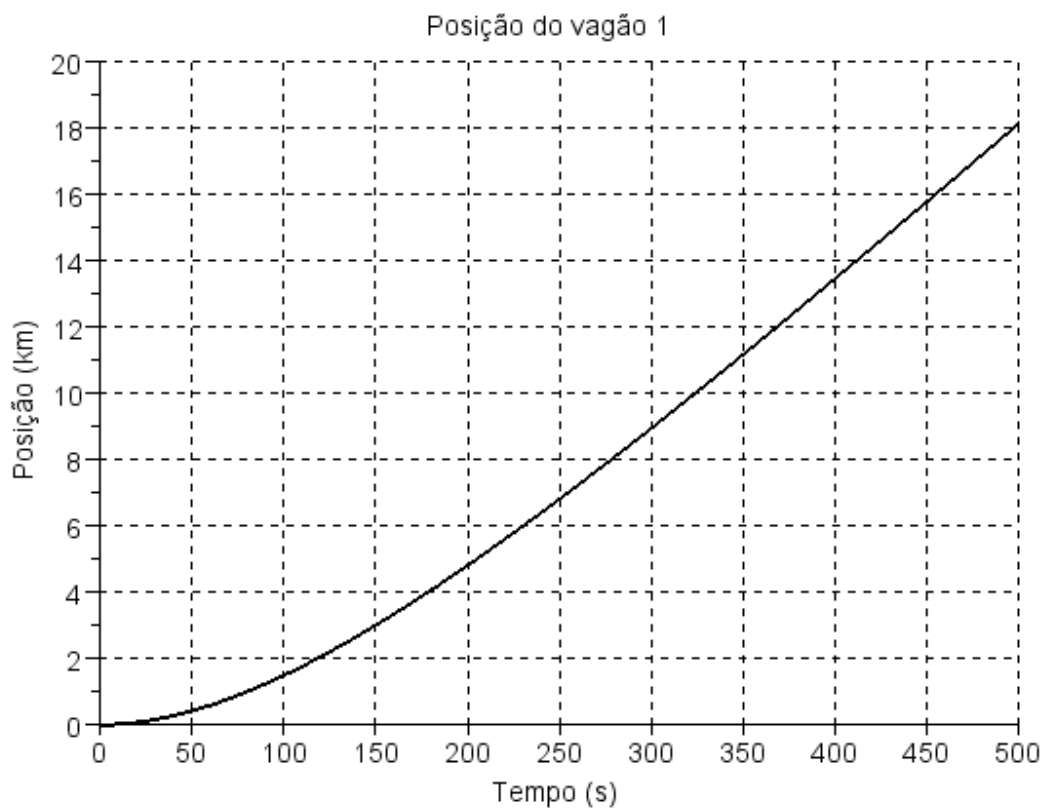


Figura 2.10 - Gráfico da posição no tempo do primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração

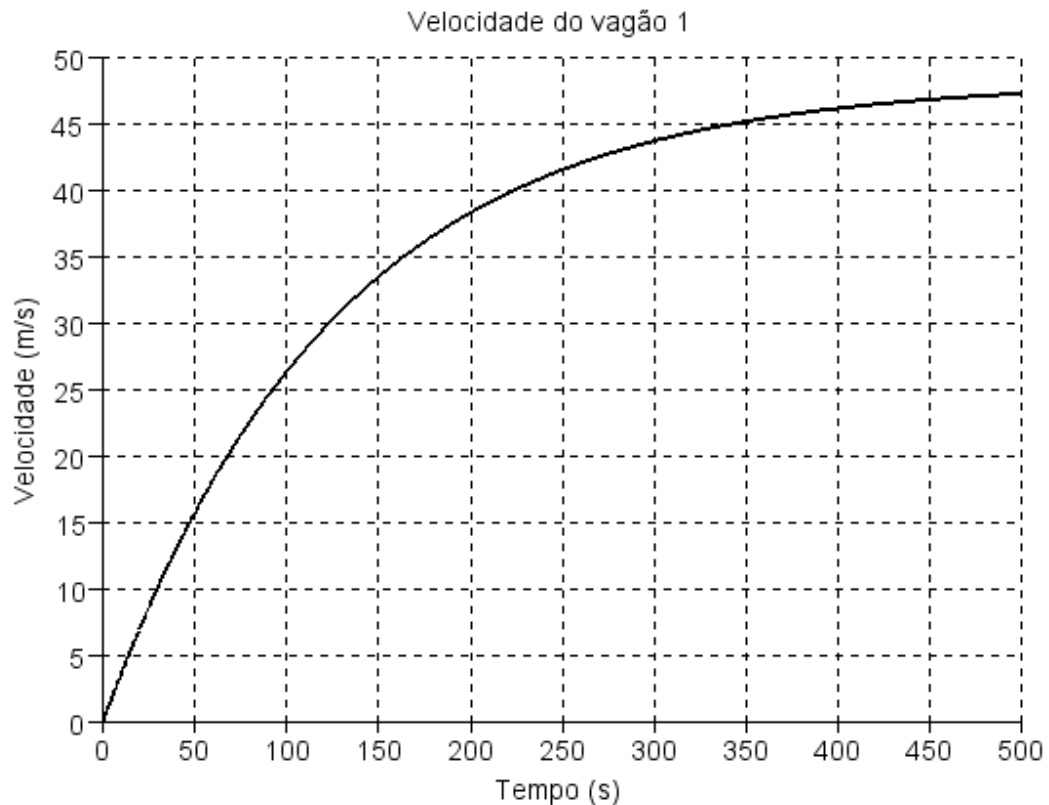


Figura 2.11 - Gráfico da velocidade no tempo do primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração

Verifica-se que diferentemente do modelo preliminar onde o trem exercia movimento com aceleração longitudinal constante, no modelo com tração elétrica aparece uma saturação da velocidade do trem. Esta saturação está ligada a saturação do motor elétrico.

Conforme o trem aumenta sua velocidade, a rotação do motor também aumenta, e neste caso proporcionalmente já que não há consideração de escorregamento no contato roda/trilho. Como o aumento da rotação do motor ocorre aumento proporcional da tensão induzida sobre a armadura do motor, reduzindo assim a tensão efetiva sobre a armadura e, por conseguinte a corrente na armadura, que pela proporcionalidade do modelo diminui o torque fornecido pelo motor. Esse processo segue até que as tensões induzida e fornecida se cancelam e o motor satura não fornecendo mais torque ao sistema e a velocidade permanece constante. Este efeito pode ser visto através dos gráficos da corrente (Figura 2.12) e torque (Figura 2.13) no sistema de tração.

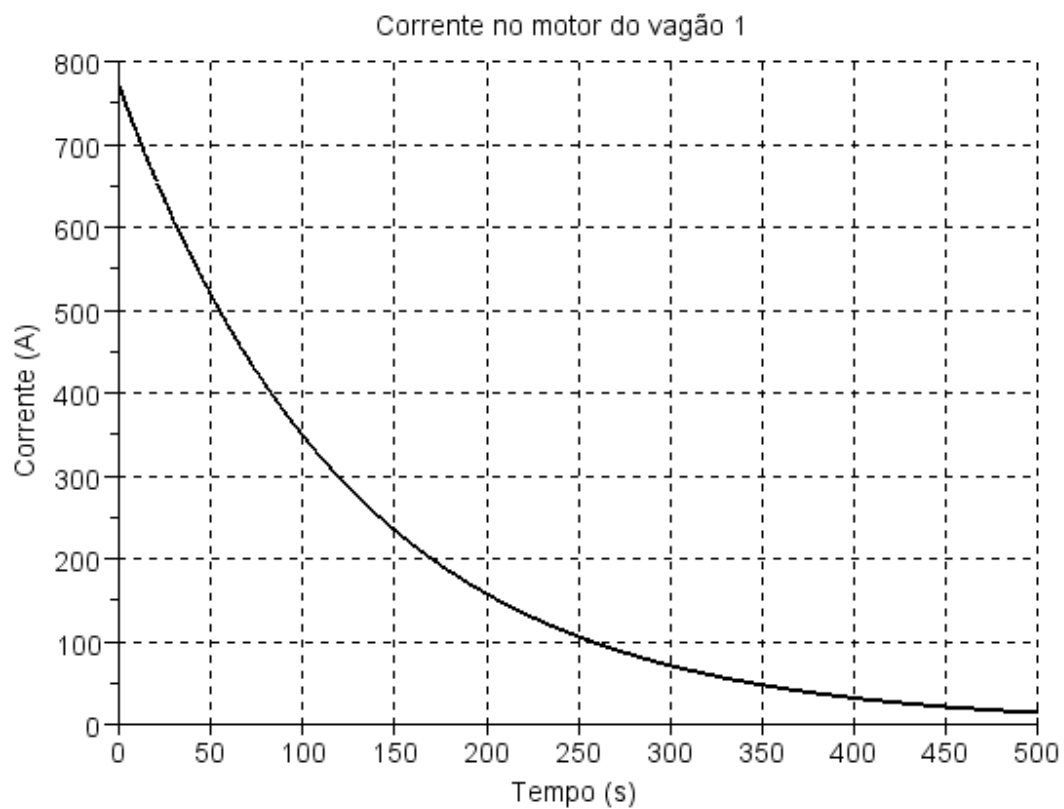


Figura 2.12 - Gráfico da corrente no motor no tempo do primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração

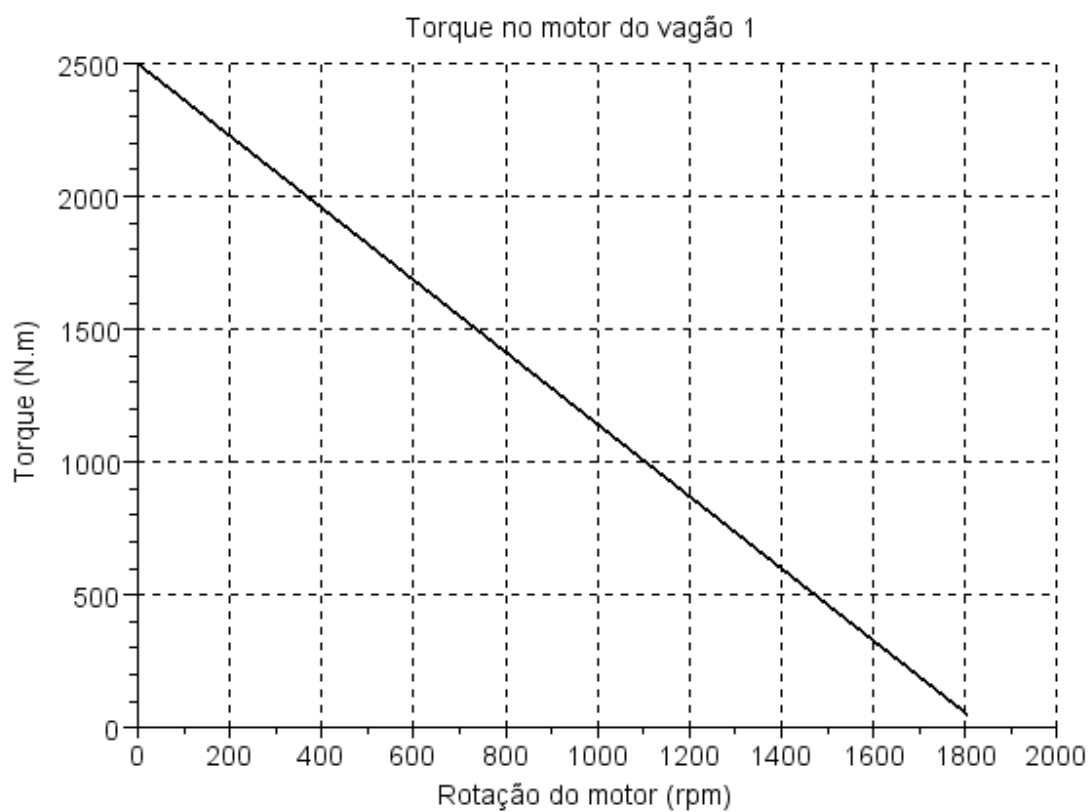


Figura 2.13 - Gráfico do torque pela rotação no motor do primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração

Como demonstrado no cálculo do torque do motor, verifica-se sua relação linear decrescente com a velocidade angular do motor.

Na Figura 2.14 vemos a potência elétrica captada na rede e a potência mecânica fornecida pelo motor.

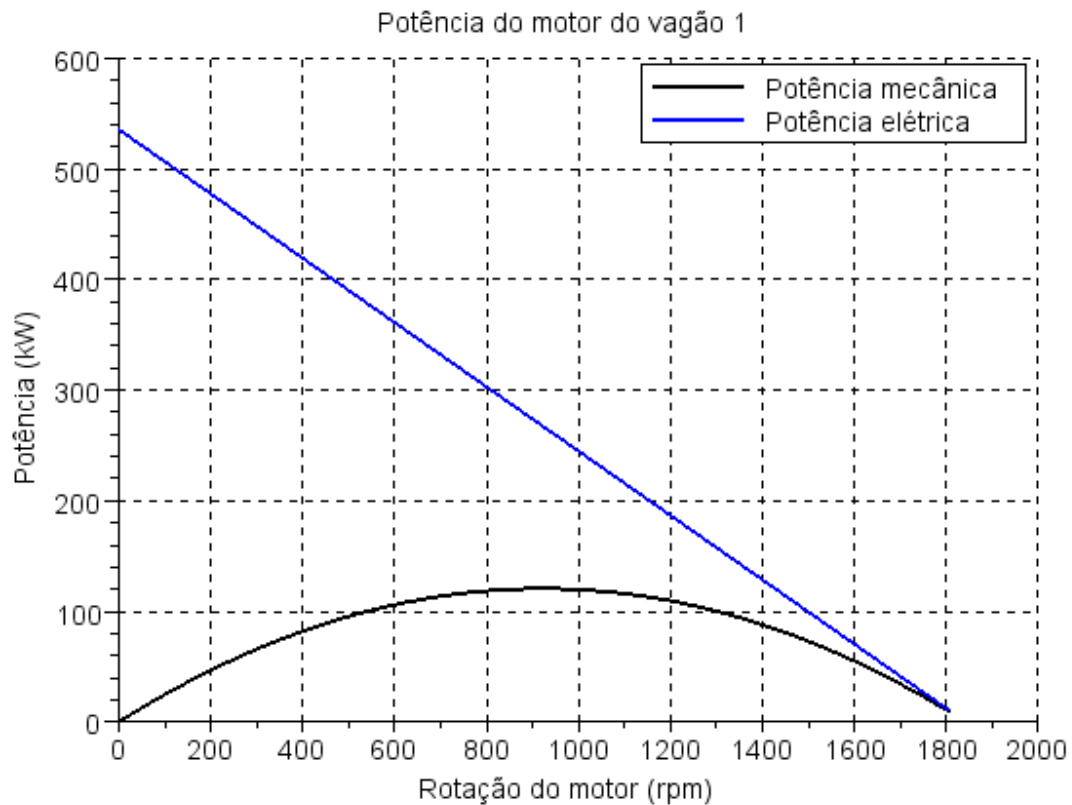


Figura 2.14 - Gráfico da potência pela rotação do motor no primeiro vagão no modelo aprimorado com sistema de tração

Observamos aqui também a comprovação da relação quadrática entre potência mecânica e velocidade angular do motor dado e da relação linear decrescente entre potência elétrica e velocidade angular.

Se verificarmos os comportamentos relativos entre os vagões, como feito anteriormente, encontraremos as mesmas características de simetria apresentadas e resultados próximos durante os primeiros 10 s de simulação (Figura 2.15 e Figura 2.16) como esperado já que as entradas no sistema foram equivalentes.

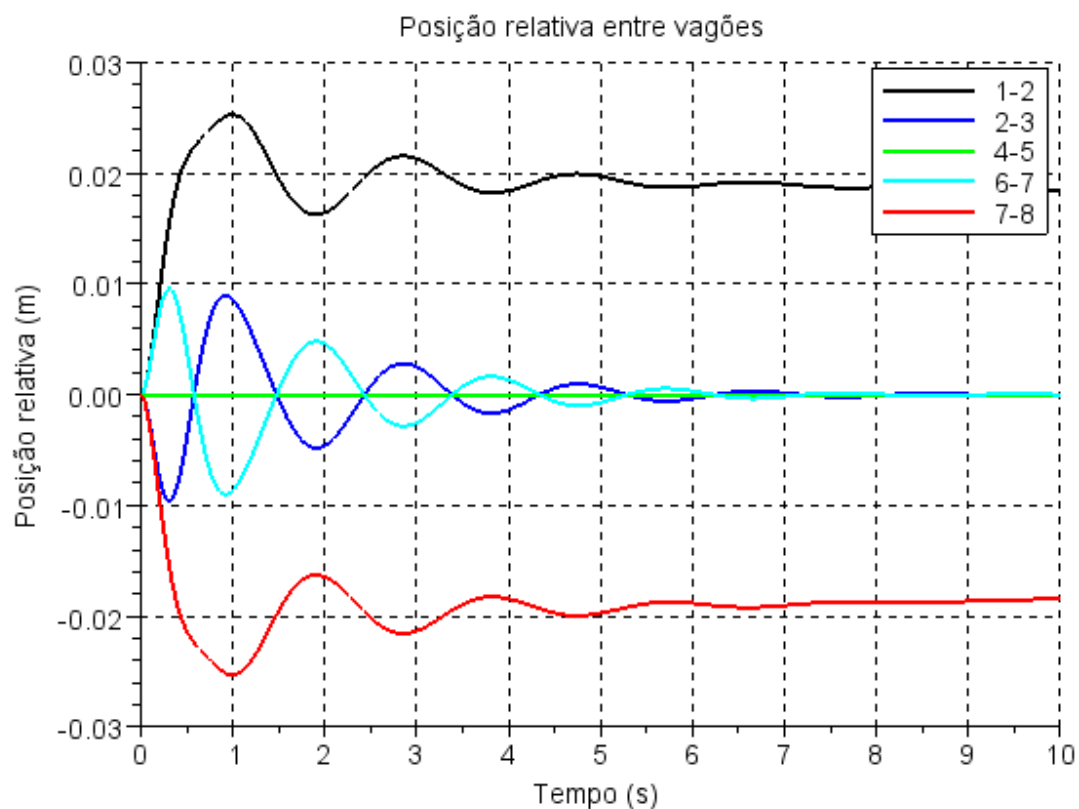


Figura 2.15 - Gráfico da diferença de posição entre os vagões no tempo no modelo aprimorado com sistema de tração

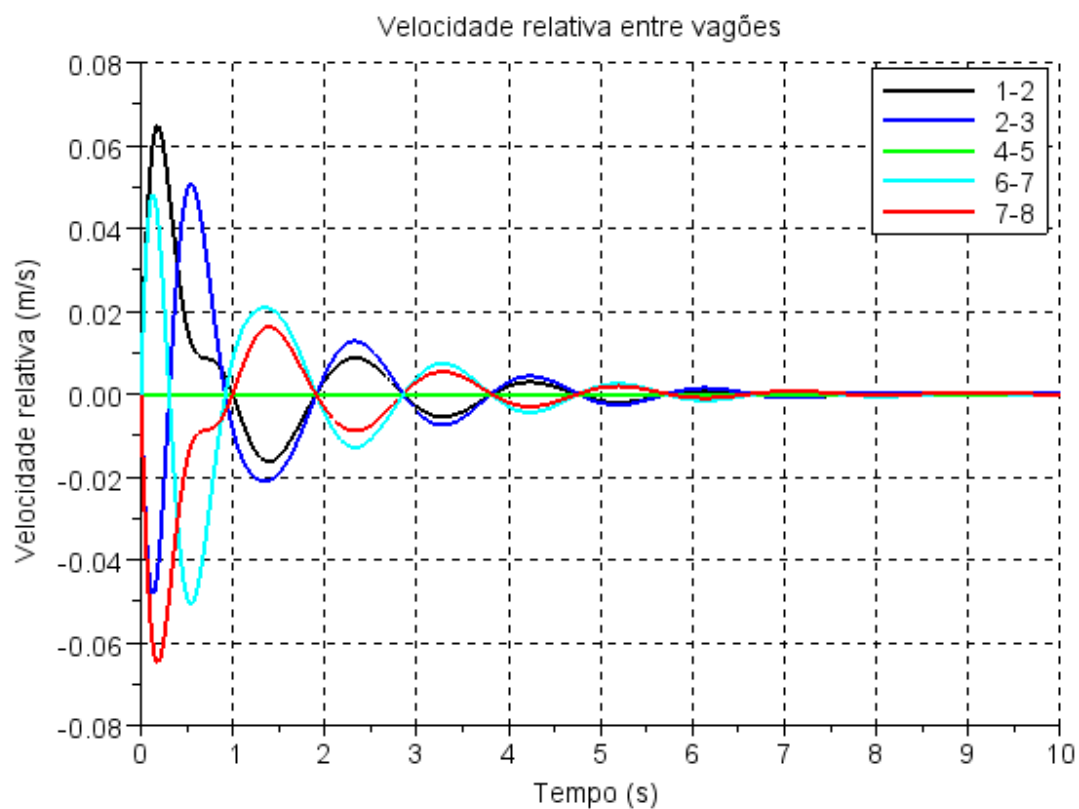


Figura 2.16 - Gráfico da diferença de velocidade entre vagões no tempo no modelo aprimorado com sistema de tração

No entanto se observarmos o sistema por um tempo mais longo (Figura 2.17) verificamos um amortecimento da posição relativa mesmo nos acoplamentos extremos do trem devido à saturação da velocidade do sistema.

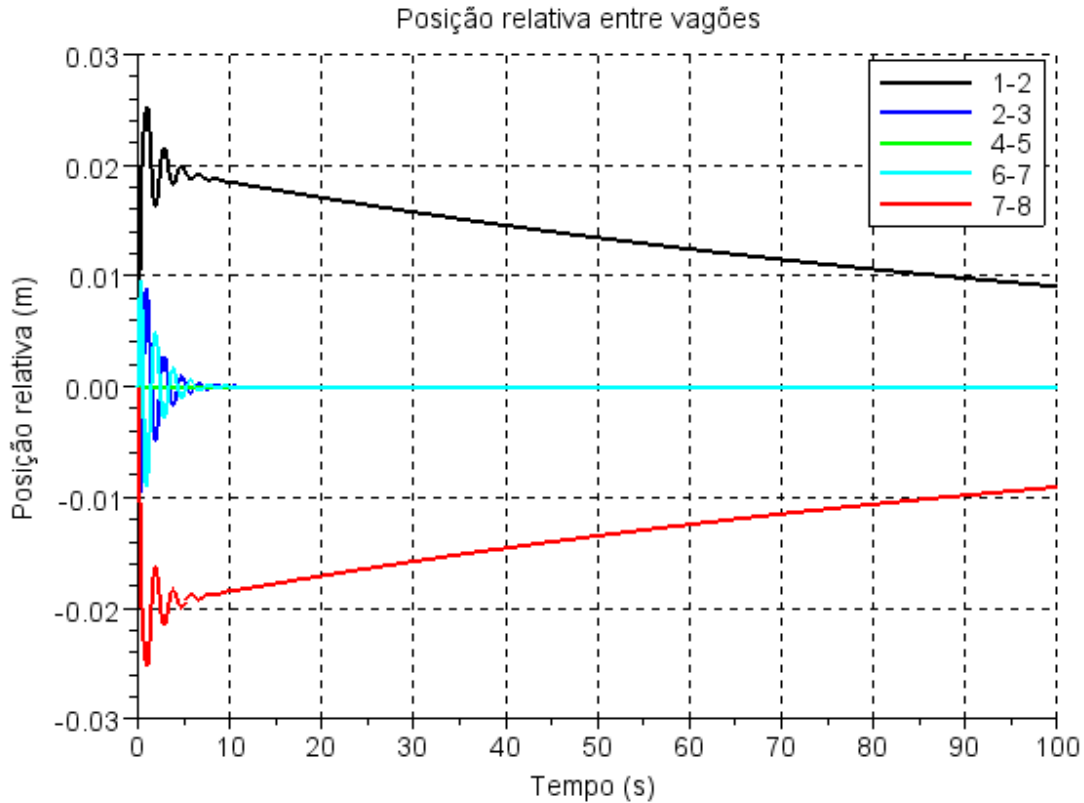


Figura 2.17 - Gráfico da diferença de posição entre os vagões até 100 s no modelo aprimorado com sistema de tração

2.2.1.2 Frequências e modos naturais de vibração

Do mesmo modo como no modelo preliminar foram avaliadas as frequências e modos naturais no modelo aprimorado.

A diferença entre os valores do modelo preliminar sem motorização para o aprimorado com motorização chega ao máximo a 3,3% nos polos dominantes, mais próximos da origem, com parte imaginária não nula, vide Figura 2.18, devido à pequena influência do amortecimento de saturação do motor frente ao amortecimento dos engates. O amortecimento de saturação tem papel importante em deslocar o par de polos nulo para o semieixo negativo real que representa o amortecimento do modo de corpo rígido do trem. A Tabela 2.4 apresenta as frequências naturais amortecidas e as taxas de decaimento do modelo aprimorado.

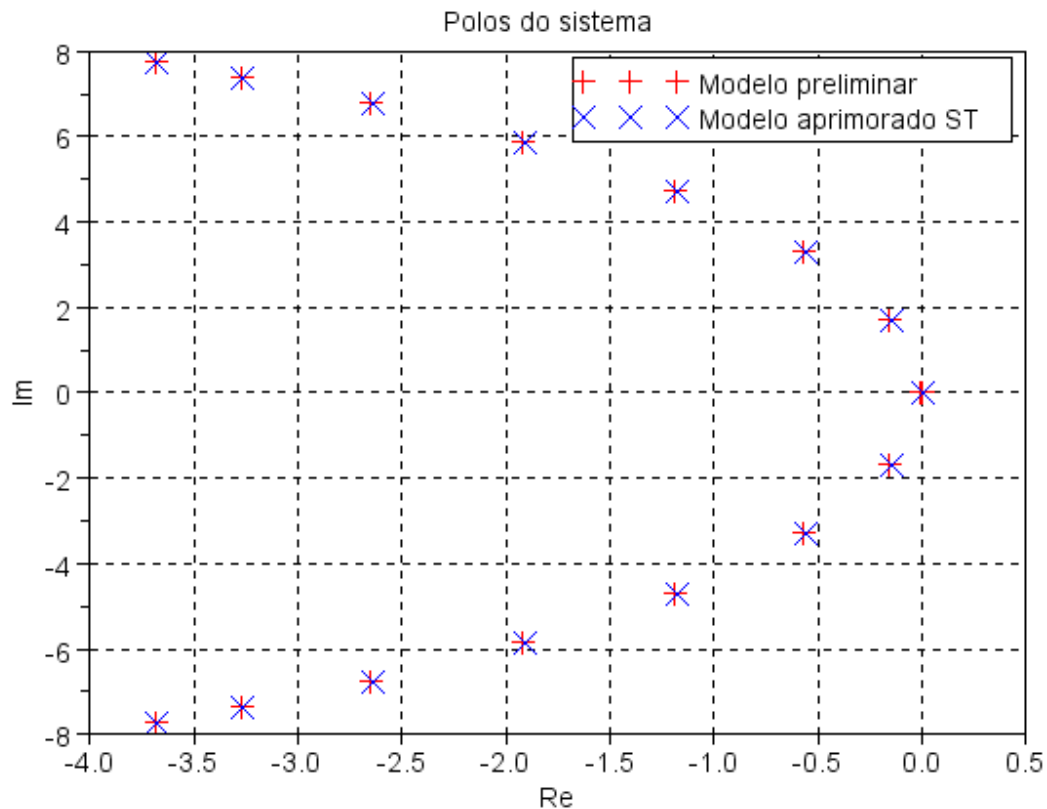


Figura 2.18 - Gráfico no plano complexo dos polos do modelo sem e com motorização

Tabela 2.4 - Frequências naturais amortecidas e taxas de decaimento do modelo aprimorado com sistema de tração

Modo	Frequência (Hz)	Taxa de decaimento (1/s)
1°	0,000	0,008
2°	0,270	0,151
3°	0,525	0,564
4°	0,750	1,186
5°	0,936	1,915
6°	1,078	2,644
7°	1,176	3,267
8°	1,233	3,680

Os modos naturais do modelo aprimorado associados às frequências naturais amortecidas possuem variação máxima de 1% em relação ao modelo preliminar. E por este fato não são apresentados nesta etapa.

2.2.2 Mecânica do contato roda/trilho

Na modelagem do trem anteriormente apresentada a inserção do sistema de tração foi realizada tomando como hipóteses que não há escorregamento no contato roda/trilho e nem tampouco saturação da força de contato. No entanto, estas duas hipóteses estão distantes da realidade, onde se verifica tanto o escorregamento quanto a saturação da força no contato.

Para que se possa melhor compreender a dinâmica longitudinal do trem, objetivo deste trabalho, é importante que tais efeitos sejam então considerados no modelo já que são de grande importância como comentada anteriormente na introdução deste trabalho.

Existem diversas teorias que descrevem a mecânica no contato roda/trilho (KALKER, 1991), desde modelos simples como o linear até modelos de maior complexidade que consideram o padrão da região de contato, a Figura 2.19 mostra alguns destes modelos através de um gráfico da força de contato em função do escorregamento. No entanto, em sua maioria descrevem a força de contato em duas faixas, uma primeira onde a força de contato acompanha o aumento do escorregamento e outra onde o escorregamento aumenta sem haver aumento da força de contato, efeito este chamado de saturação da força de contato.

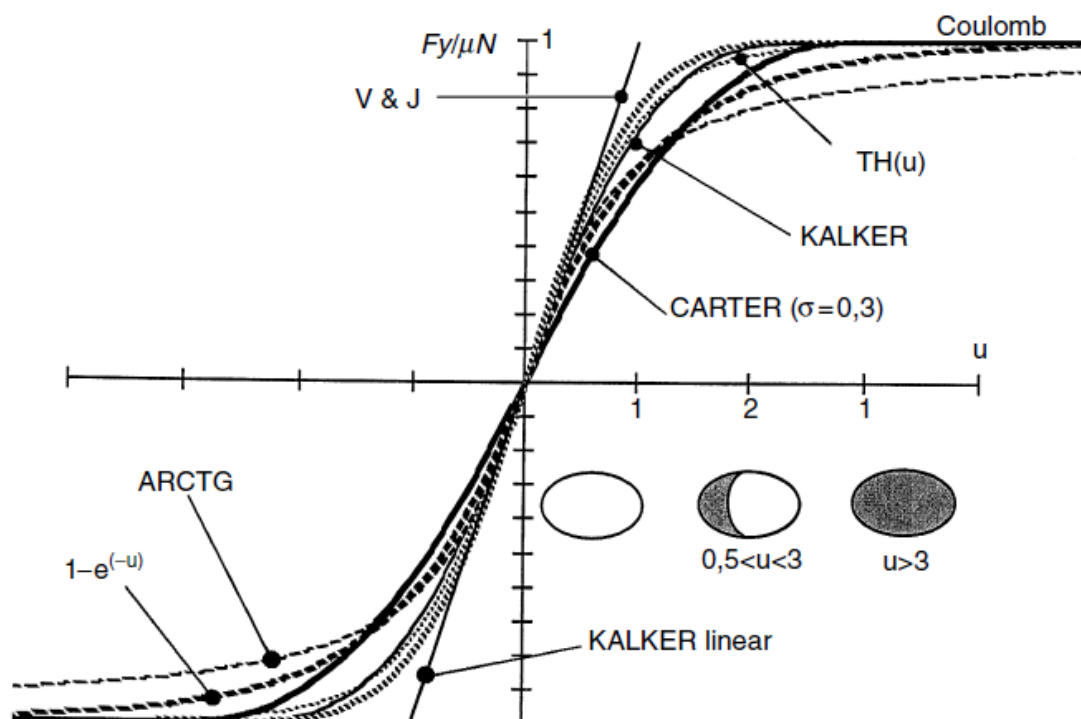


Figura 2.19 - Modelos para mecânica no contato roda/trilho (IWNICKI, 2006)

Neste trabalho adotou-se o modelo linear que representa com precisão o comportamento para baixos valores de escorregamento e apesar de neste trabalho o escorregamento ser levado até a saturação da força onde o modelo perde aderência com o comportamento real sua adoção se mostrou útil pela simplicidade.

Primeiramente tomamos o escorregamento longitudinal (ξ_x) no contato como sendo uma referência entre a diferença entre a velocidade circunferencial e translacional da roda.

$$\xi_x = \frac{V_c - V_t}{V_t} = \frac{\omega \cdot r - \dot{x}}{\dot{x}}$$

Onde V_c é a velocidade circunferencial no bordo da roda que é dada pelo produto entre sua velocidade angular ω e seu raio, e V_t é a velocidade translacional que é a mesma velocidade do carro.

O efeito de saturação é caracterizado pela Lei de Coulomb que determina a máxima força no contato como:

$$F_{xmax} = \mu \cdot N$$

Onde μ é o coeficiente de atrito no contato roda/trilho e N é a força normal neste contato. O coeficiente de atrito é dependente das propriedades mecânicas e superficiais dos materiais em contato e da existência e quantidade de contaminantes como água e areia. Para acentuar os efeitos de escorregamento utilizou-se coeficiente de atrito para contato roda/trilho contaminado com água (LEWIS, LEWIS e OLOFSSON, 2011), $\mu = 0,25$.

Antes de atingir a saturação a força no contato é proporcional ao escorregamento por:

$$F_x = k_f \cdot \xi_x$$

Onde o fator k_f é dependente de diversos parâmetros do contato (KALKER, 1991) como forma e dimensões da área de contato e propriedades mecânicas dos materiais em contato. No entanto sua formulação não é relevante neste trabalho e será apenas adotado como uma constante de proporcionalidade característica.

Para que se possa inserir a mecânica de contato é preciso, a partir deste ponto, desacoplar o sistema de tração do vagão, ou seja, desacoplar o movimento rotacional das rodas do movimento translacional do vagão. A relação entre estes dois sistemas passa a ser a força no contato roda/trilho.

Para compreender melhor os efeitos da mecânica de contato na dinâmica longitudinal realizou-se nesta etapa a modelagem de apenas um vagão motorizado que depois será inserido no modelo completo do trem. Nesta fase da modelagem foi feita a hipótese de que em um vagão motorizado que é composto por quatro eixos, sendo os quatro motorizados, o comportamento dos quatro eixos é o mesmo, ou seja, a velocidade angular nos quatro é a mesma de modo que os quatro sistemas de tração trabalham de forma idêntica e são tomados como sendo um único sistema com quatro vezes a potência de um sistema unitário.

Deste modo para um único vagão temos dois sistemas: o sistema de tração e o vagão em si. Retomando as equações apresentadas na modelagem do sistema de tração temos para o sistema de tração:

$$\begin{aligned}\sum T_{roda} &= J \cdot \ddot{\theta} \\ T_m \cdot i_t - F_x \cdot r &= J \cdot \ddot{\theta} \\ J \cdot \ddot{\theta} &= \frac{K_1 i_t}{R} \cdot e - \frac{K_1 K_2 i_t^2}{R} \cdot \dot{\theta} - F_x \cdot r\end{aligned}$$

E para o vagão:

$$4F_x = M \cdot \ddot{x}$$

O sistema passa a ter dois graus de liberdade levando a quatro variáveis de estado. O sistema no espaço de estados na forma matricial se torna:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_1 K_2 i_t^2}{JR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{r}{J} & \frac{K_1 i_t}{JR} \\ 0 & 0 \\ \frac{4}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ e \end{Bmatrix}$$

2.2.2.1 Simulação e análise

O sistema diferencial matricial exposto acima foi implementado no software Scilab e o programa se encontra no ANEXO C.

Os parâmetros básicos e do sistema de tração utilizados para simulação são os mesmos apresentados anteriormente. No entanto para acentuar os efeitos da mecânica de contato a resistência do motor foi reduzida para 0,3 ohms nesta simulação.

Os parâmetros para a mecânica de contato são:

- Constante de proporcionalidade no contato: $k_f = 1e6$ N;
- Coeficiente de atrito contato roda/trilho: $\mu = 0,25$.

Foi fornecida uma entrada de tensão em rampa no motor a uma taxa de aumento de 500 V/s até atingir uma tensão limite de 1500 V aos 3 segundos de simulação, permanecendo constante a partir de então. O tempo de simulação foi de 100 segundos também para melhor observar o comportamento do sistema.

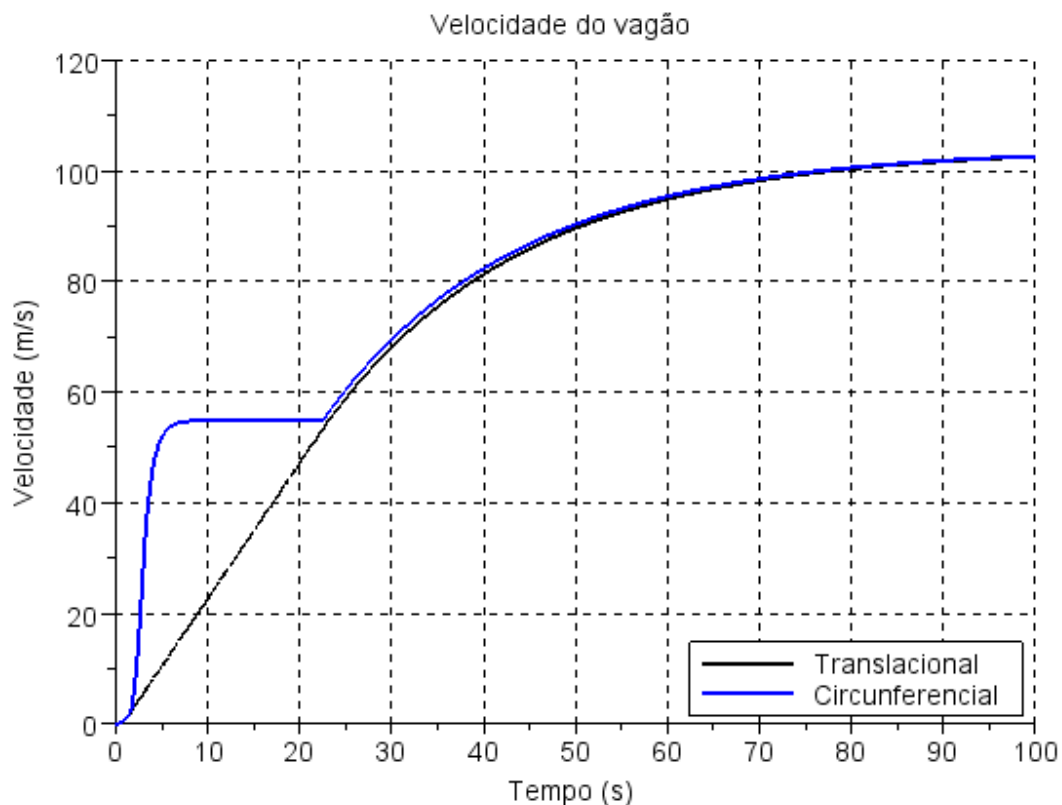


Figura 2.20 - Velocidades translacional e circunferencial do modelo de um vagão com mecânica de contato

No gráfico de velocidade por tempo apresentado acima se verifica o distanciamento da velocidade circunferencial para a velocidade translacional. Devido à alta tensão gradativamente fornecida ao motor, e logo um alto torque, a velocidade circunferencial da roda vai se afastando da velocidade translacional com aumento rápido do escorregamento. Aos 3 segundos a tensão fornecida atinge seu limite e começa a ocorrer a saturação da rotação do motor permitindo que as velocidades voltem a se aproximar e a partir dos 22,5 s verifica-se o retorno da aderência entre os dois sistemas com redução gradativa do escorregamento.

Podemos ainda analisar o comportamento do sistema através do gráfico do escorregamento no contato pelo tempo, Figura 2.21. O escorregamento inicia

aumentando linearmente acompanhando o aumento de tensão fornecida ao motor. O escorregamento aumenta linearmente até os 1,5 s, instante no qual atinge valor de 0,031 e ocorre saturação da força de contato havendo perda de aderência entre as velocidades circunferencial e translacional na roda levando a um aumento rápido do escorregamento até os 3 s, instante no qual a tensão é limitada em seu máximo. Inicia-se então a saturação do motor que leva primeiro a um retardamento do aumento do escorregamento que atinge seu máximo aos 3,6 s e depois a uma queda rápida até atingir o limiar de 0,031 aos 22,5 s. A partir deste instante ocorre aderência entre os sistemas e retorno a zona de proporcionalidade da força de contato. Devido novamente à saturação do motor, agora acoplado ao vagão, ocorre a aproximação dos sistemas e redução gradativa do escorregamento.

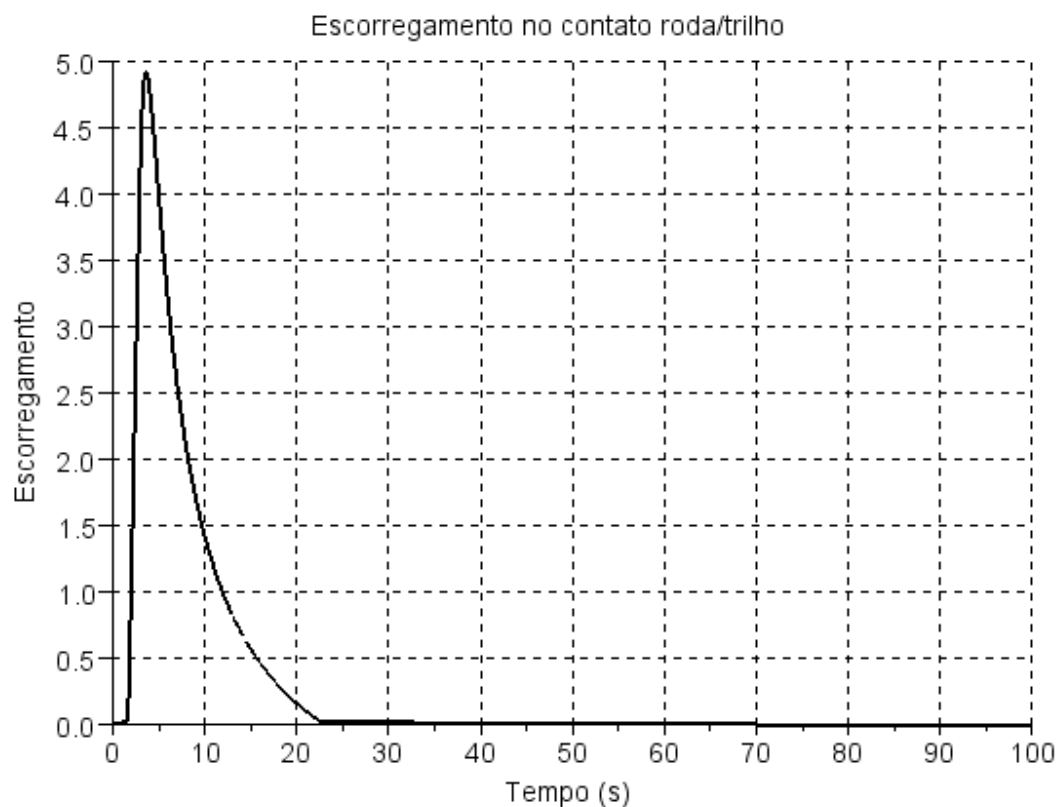


Figura 2.21 - Escorregamento no modelo de um vagão com mecânica de contato

Podemos acompanhar este comportamento ainda pelo gráfico da força de contato, Figura 2.22, onde vemos que ocorre a saturação da força de contato no intervalo de 1,5 a 22,5 segundos de simulação.

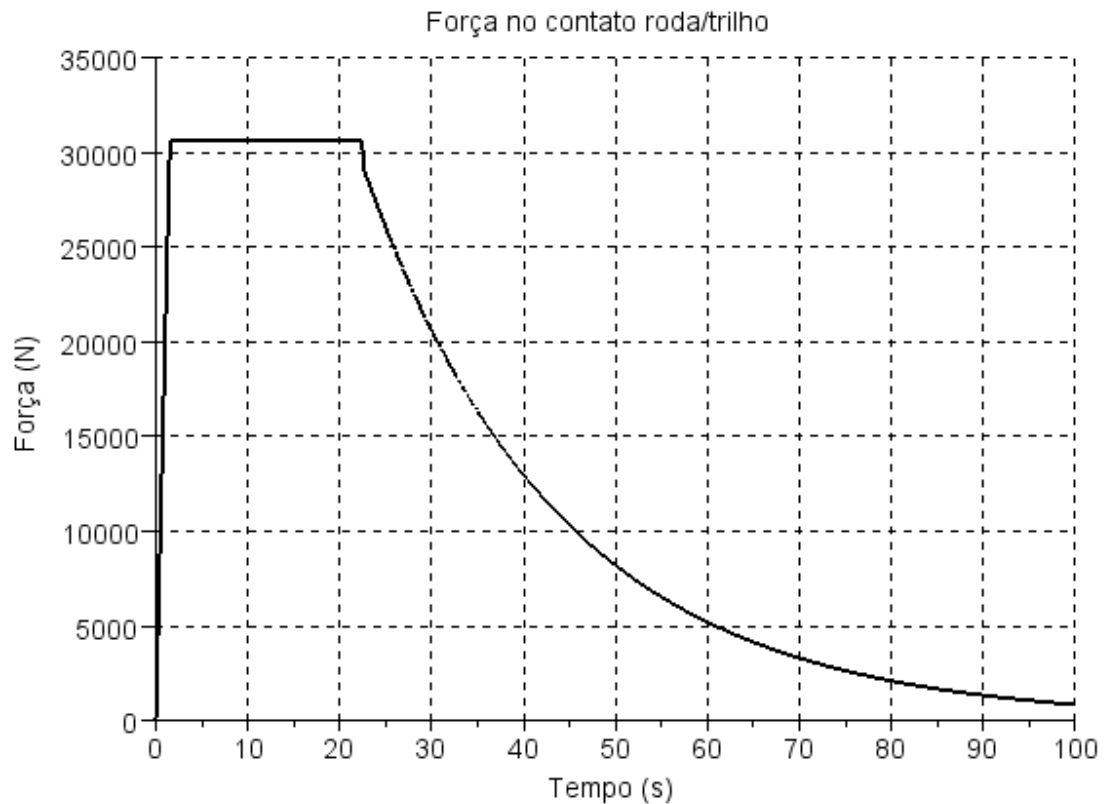


Figura 2.22 - Força no contato roda/trilho no modelo com mecânica de contato

Observando o gráfico da força de contato pelo escorregamento, Figura 2.23, verificamos que o modelo foi aplicado como proposto, onde se identifica uma faixa onde a força de contato e o escorregamento aumentam de forma proporcional até ocorrer a saturação com a força de contato se mantendo constante e o escorregamento aumentando livremente.

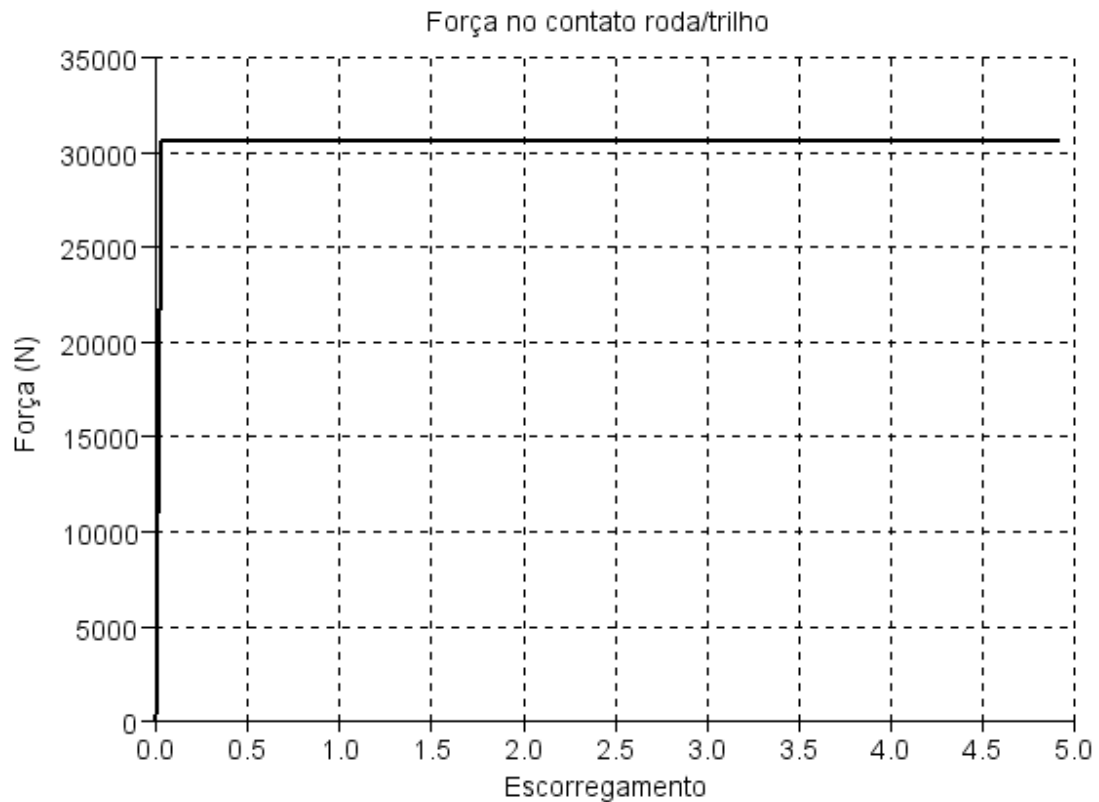


Figura 2.23 - Força de contato pelo escorregamento no modelo com mecânica de contato

Comparando a velocidade do modelo considerando a mecânica de contato com o modelo de hipótese de não escorregamento na Figura 2.24, podemos verificar a influência que a mecânica de contato tem sobre a dinâmica longitudinal do trem. Quando se considera a mecânica de contato o desempenho do trem é reduzido pela perda de potência que ocorre no contato devido ao escorregamento, mostrando a importância de sua consideração no modelo da dinâmica longitudinal de um trem. Na Figura 2.25 verificamos a diferença entre a potência captada da rede elétrica, fornecida pelos motores e a potência útil no movimento longitudinal do vagão.

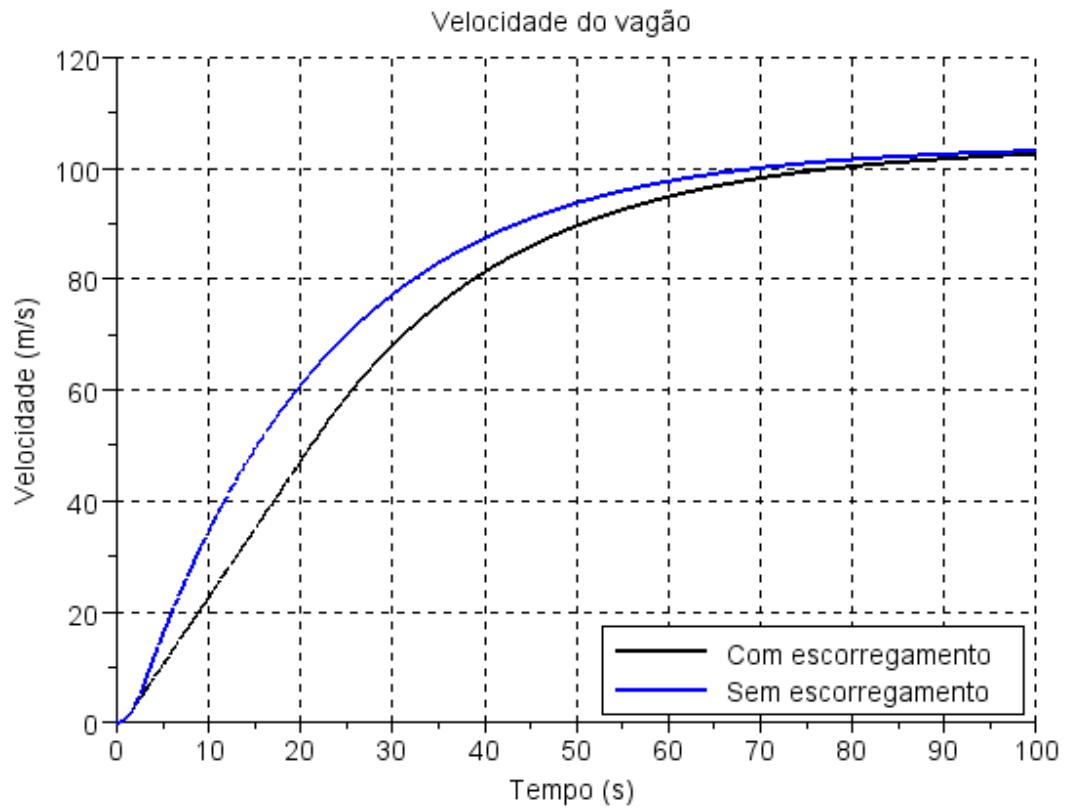


Figura 2.24 - Comparação da velocidade dos modelos com mecânica de contato e com hipótese de não escorregamento

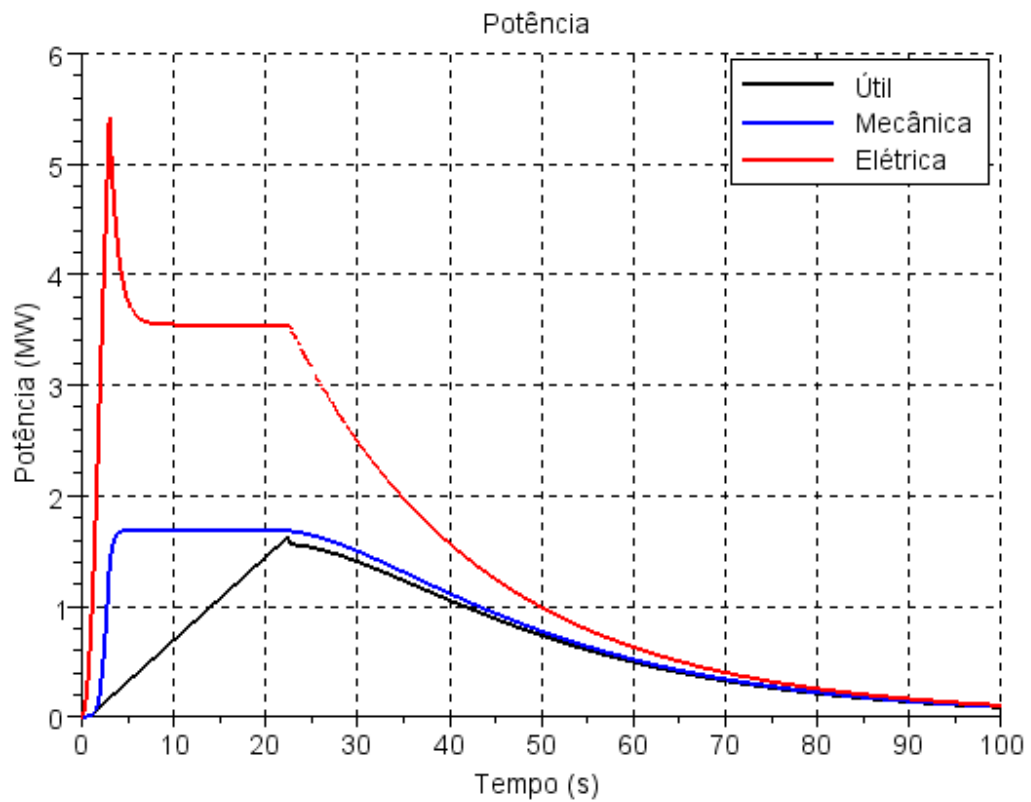


Figura 2.25 - Potência fornecida pelo motor e útil no modelo de um vagão com mecânica de contato

Podemos observar que na faixa onde ocorre a perda de aderência e o aumento excessivo do escorregamento, 1,5 a 22,5 segundos, as curvas de potência mecânica e útil se distanciam reduzindo o rendimento no contato como podemos ver na Figura 2.26. Devido ao aumento do escorregamento o rendimento do contato cai até 12% no ponto de maior escorregamento, voltando a subir conforme a aderência entre os sistemas reaparece.

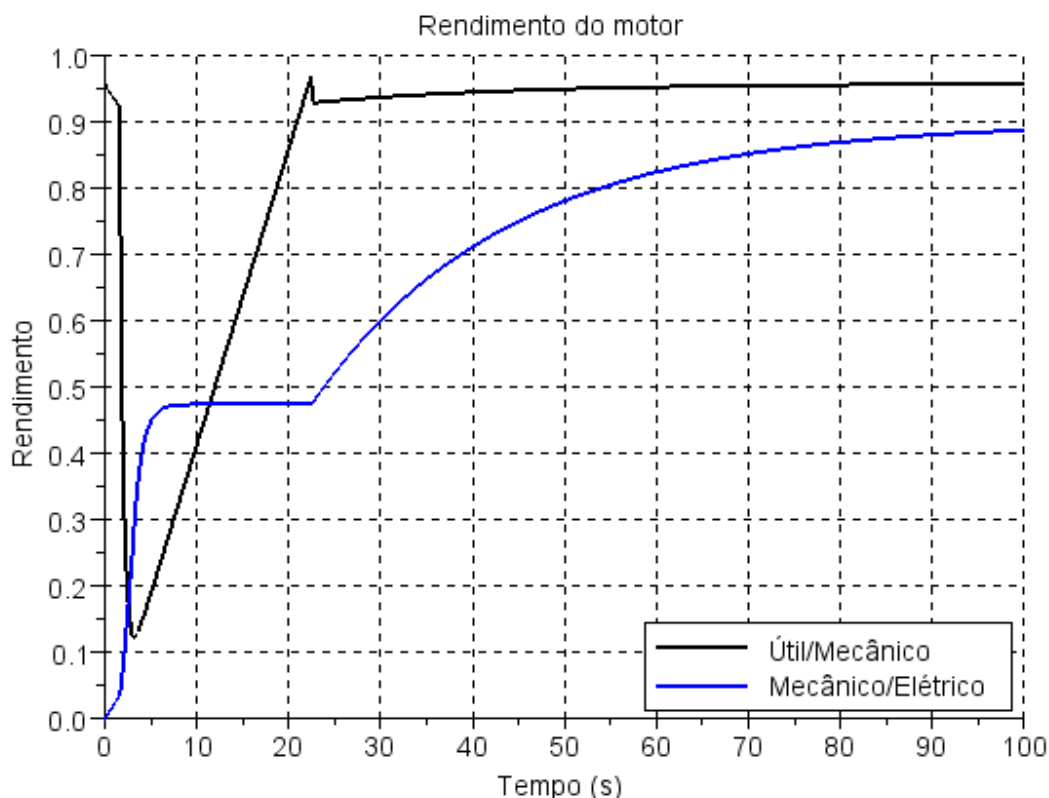


Figura 2.26 - Rendimento no modelo de um vagão com mecânica de contato

Avaliando a curva de potência e rendimento entre mecânico e elétrico vê-se que a região de escorregamento tem papel em retardar o avanço do motor em atingir seu rendimento máximo, pois a saturação da força de contato obriga-o a trabalhar a um rendimento de 47%. Após a restauração da aderência aos 22,5 s a força no contato volta a cair e o motor tende ao seu rendimento máximo sem carga que é definido pela razão parâmetros do motor K1 e K2, que para o modelo avaliado é de 90%. Verificamos que o rendimento útil/mecânico médio é de 86,0%.

Submetendo o modelo agora a uma entrada de mesma tensão máxima, mas fornecida a uma taxa temporal dez vezes menor (50 V/s), se observa uma maior aderência entre os sistemas como podemos ver pelo gráfico de velocidade do modelo, Figura 2.27.

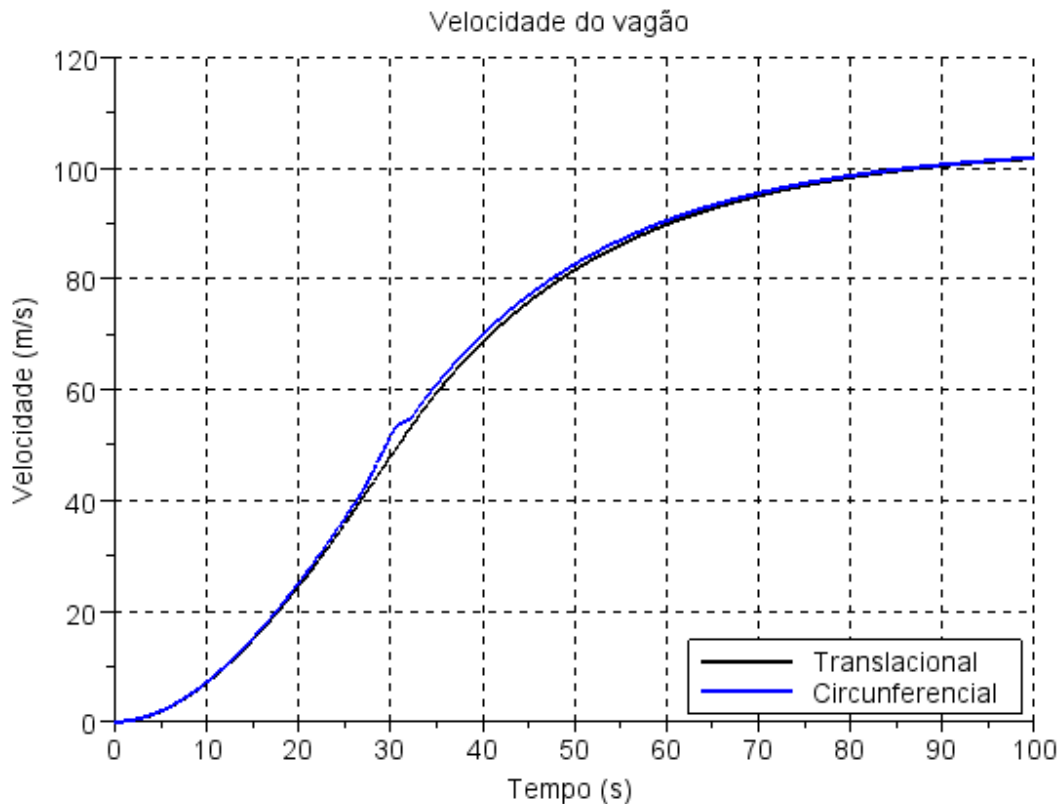


Figura 2.27 - Gráfico da velocidade do modelo de um vagão com mecânica de contato com entrada de tensão a 50 V/s.

Verificamos então que as curvas de potência (Figura 2.28) se mantêm mais proporcionais sem o aparecimento do afastamento das curvas como observado no modelo com entrada de tensão a 500 V/s. Isso leva a melhores rendimentos como se observa na Figura 2.29, sem a presença da queda acentuada do rendimento no contato presente na simulação anterior. Deste modo o rendimento útil/mecânico médio passa para 94,3%, um aumento de 10% no rendimento do contato devido ao aumento da aderência entre os sistemas.

Verifica-se que o modo como a tensão é fornecida ao sistema, no caso a taxa temporal de fornecimento, é de grande importância a manter o escorregamento a níveis em que não ocorra a saturação da força de contato reduzindo assim a perda de potência e consequentemente aumentando o rendimento energético do sistema de tração. A importância deste efeito em conjunto com problemas de desgaste da via devido ao escorregamento no contato justifica de o projeto de um controle do sistema de tração.

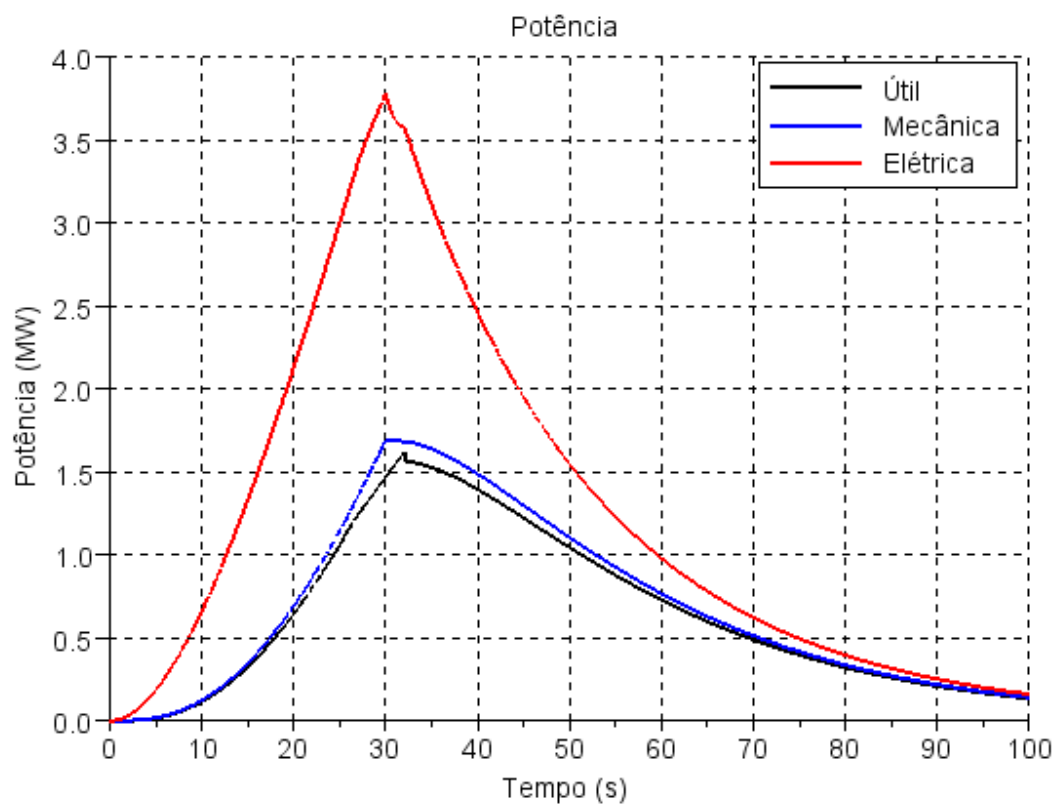


Figura 2.28 - Potência do modelo de um vagão com mecânica de contato a uma entrada de tensão a 50 V/s

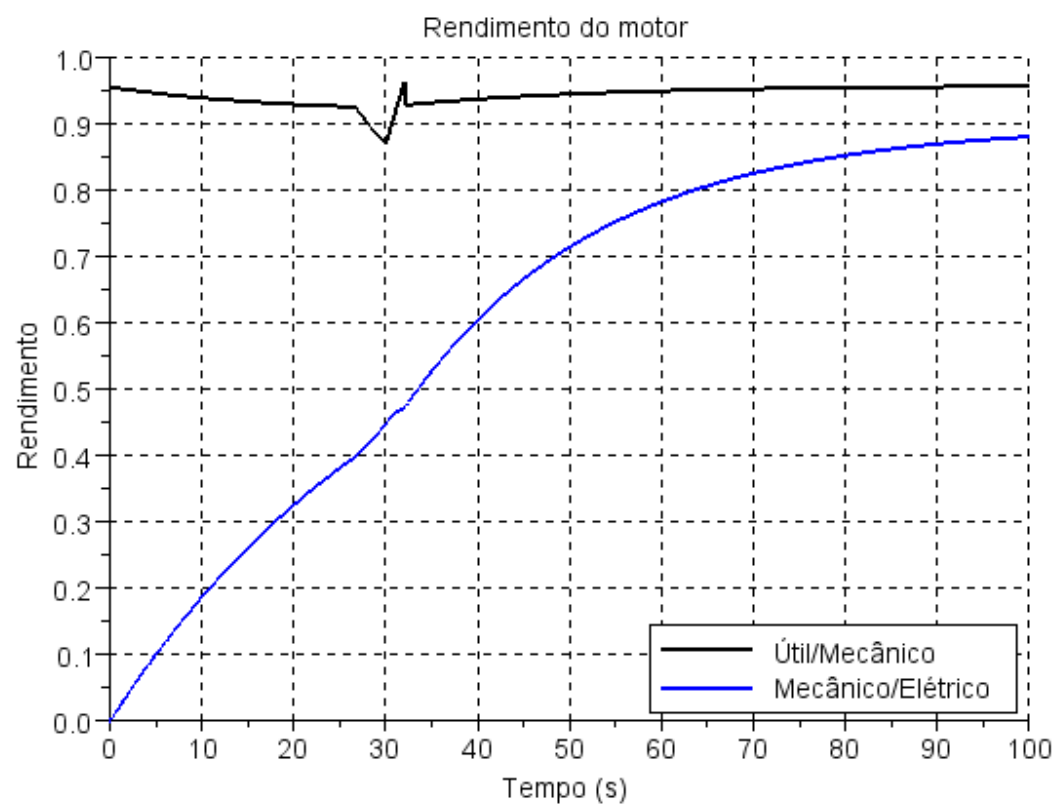


Figura 2.29 - Rendimento do modelo de um vagão com mecânica de contato a uma entrada de tensão a 50 V/s

2.3 Forças resistivas ao movimento

Até o momento nenhum tipo de força externa limitava o movimento do trem, a limitação da velocidade se dava apenas pelos efeitos eletromagnéticos de saturação do motor.

No entanto diversas forças externas atuam sobre o trem impedindo o seu avanço e devem ser computados de modo a termos um modelo mais próximo da realidade e deste modo mais útil ao projeto de um controlador de um sistema complexo como este.

Apesar de diversos fatores influenciarem nas forças resistivas ao movimento, elas são tomadas amplamente como sendo da forma:

$$F_{res} = fA + fB \cdot V + fC \cdot V^2$$

Esta equação é conhecida como Fórmula de Davis e três principais comportamentos são responsáveis por explicá-la: força resistiva ao rolamento, força resistiva de atrito viscoso e força de arrasto aerodinâmico, representando os fatores fA , fB e fC respectivamente (IWNICKI, 2006).

A força resistiva ao rolamento surge do perfil de pressão no contato entre roda e pavimento. Este efeito aparece com maior influência em materiais de grande deformação, como no caso do pneu e asfalto. Como o perfil de pressão não é simétrico a força resultante aparece deslocada um pouco a frente do eixo de rotação da roda causando um torque resistente. Este torque é constante variando muito pouco com a velocidade e representa assim majoritariamente o termo constante da equação acima apresentada. No caso de um trem no qual ocorre contato entre materiais pouco deformáveis, aço/aço, este efeito acaba tendo pouca influência.

A força resistiva de atrito viscoso aparece nos mancais dos eixos e caixas de engrenagem do veículo e também do contato entre flange da roda e trilho. Seu comportamento é proporcional à velocidade sendo responsável pelo termo linear da equação de força resistente.

A força de arrasto aerodinâmico se deve fundamentalmente ao perfil de pressão sobre um corpo dentro de um escoamento e é proporcional ao quadrado da velocidade do escoamento. Devido a esta relação quadrática a força de arrasto acaba tendo papel predominante em trens de alta velocidade que chegam a velocidades máximas de 300 km/h.

Em (ROCHARD e SCHIMID, 2000) encontramos os coeficientes da fórmula de Davis para o Shinkansen Series 200, trem de alta velocidade japonês.

$$F_{res} = 8202 + 106,56V + 11,93V^2$$

Onde a força resistiva ao movimento é dada em newtons e a velocidade do trem em metros por segundo.

Para manter-se a uma velocidade de 300 km/h (83,3 m/s) o sistema de tração tem de fornecer potência igual a potência dissipada pelas forças resistivas e logo:

$$P_{res} = F_{res}V = (8202 + 106,56 \cdot 83,3 + 11,93 \cdot 83,3^2)83,3 = 8,33 \text{ MW}$$

Este valor é próximo do encontrado para o trem Velaro CN e comprova alta necessidade de potência deste sistema. Ainda verificamos que para esta velocidade a potência gasta devido a força de arrasto aerodinâmico representa 83% da potência total que justifica detalhados projetos aerodinâmicos que buscam reduzir esta componente.

Partindo do modelo de um único vagão com sistema de tração elétrico e mecânica de contato, foram inseridas as forças resistivas ao movimento. Nesta etapa foi inserido apenas 1/8 da força resistiva já que a equação acima é para um trem completo de 8 vagões.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_1 K_2 i_t^2}{JR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{r}{J} & \frac{K_1 i_t}{JR} \\ 0 & 0 \\ \frac{4}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{res} \\ 8 \end{Bmatrix}$$

2.3.1.1 Simulação e análise

O sistema de equações de estado acima descrito foi implementado no software Scilab.

Verificamos na Figura 2.30 que a velocidade ao fim da simulação é de 95 m/s enquanto que no modelo sem forças resistivas era de 103 m/s, como esperado as forças resistivas limitam o movimento do veículo reduzindo sua velocidade final.

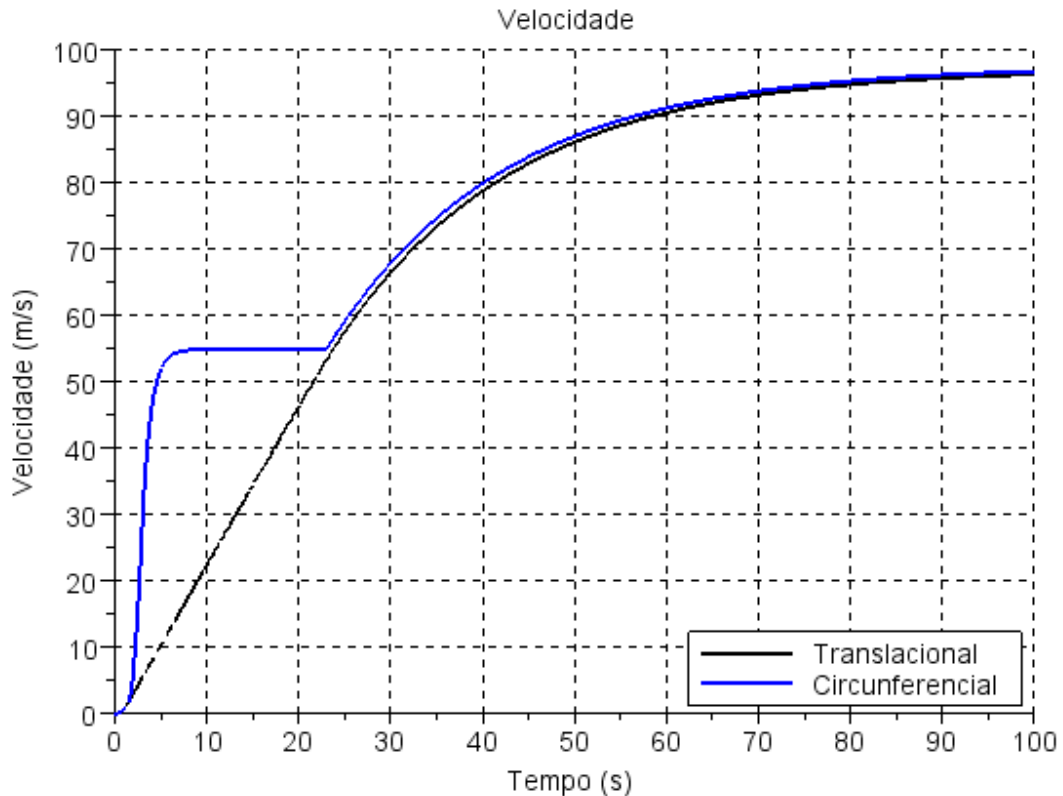


Figura 2.30 - Gráfico da velocidade do modelo de um vagão com sistema de tração, mecânica de contato e forças resistivas

Se verificarmos o escorregamento no contato graficamente não encontraremos diferença, o valor máximo de escorregamento tem um aumento de apenas 1,2%, pois na faixa de tempo onde ocorre a saturação da força de contato as forças resistivas não desempenham papel tão relevante na dinâmica, no entanto o valor final do escorregamento, em regime permanente, passa de 0,00086 para 0,00459, um aumento de 434%. Deste modo observamos que as forças resistivas contribuem para a perda de aderência entre os sistemas e por isso devem ser levadas em conta neste trabalho.

No gráfico da corrente do motor, Figura 2.31, verificamos que ela tende a um valor positivo não nulo, diferentemente do modelo sem forças resistivas em que a corrente tendia a zero. Isso mostra que o motor continua fornecendo torque e consumindo potência para manter o vagão em movimento como vemos na Figura 2.32.

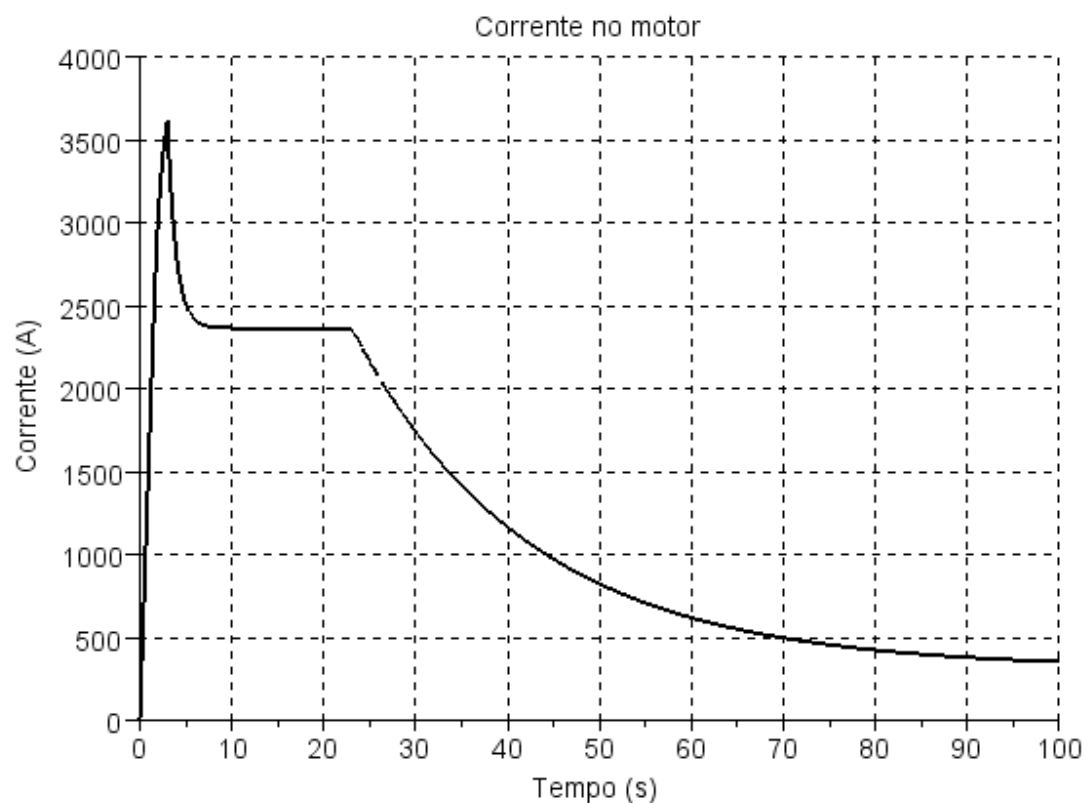


Figura 2.31 - Gráfico da corrente do motor do modelo de um vagão com sistema de tração, mecânica de contato e forças resistivas

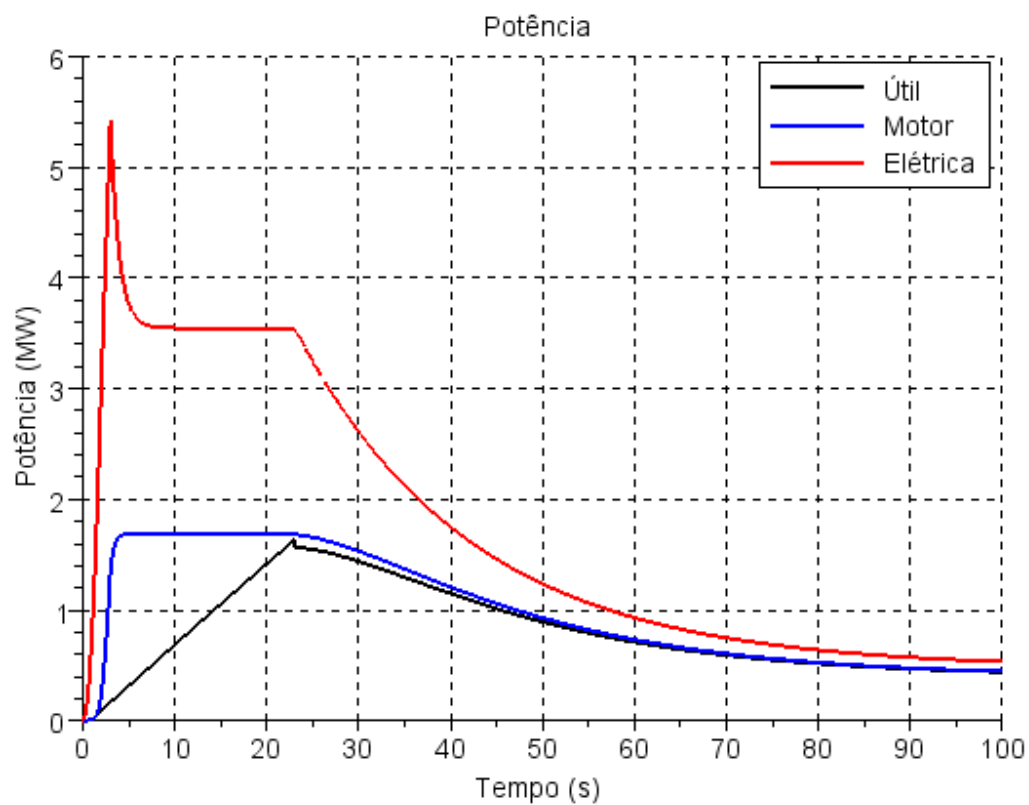


Figura 2.32 - Gráfico de potência para um eixo do modelo de um vagão com sistema de tração, mecânica de contato e forças resistivas

2.4 Modelo completo

Para obter o modelo completo do trem considerando o sistema de tração elétrica com motor CC, mecânica de contato roda/trilho e forças resistentes ao movimento, os modelos anteriormente expostos foram sobrepostos.

Partindo do modelo de trem com tração elétrica foi inserida a mecânica de contato nos carros motores separando sistema de tração dos vagões para estes carros e então são inseridas as forças resistivas ao movimento como perturbações ao sistema. Chegando ao sistema na forma geral:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ep \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Onde A é a matriz dinâmica do sistema, B é a matriz de controle do sistema, E é a matriz de perturbações, C é a matriz de observação, D é a matriz de incidência, x é o vetor de estados, u é o vetor de entradas, p é o vetor de perturbações e y é o vetor de saídas.

As hipóteses para o modelo completo são:

- Comportamento do motor CC é linear;
- Todos os motores de um mesmo vagão se comportam da mesma forma e são alimentados pela mesma tensão;
- Todos os contatos roda/trilho em um mesmo vagão apresentam o mesmo escorregamento;
- A força no contato é linearmente proporcional ao escorregamento e possui saturação por Lei de Coulomb;
- Os acoplamentos entre vagões são mola-amortecedores lineares sem folga;
- Nos vagões sem sistema de tração a inércia dos rodeiros foi adicionada a massa translacional do vagão.

Considerando o vetor VT que representa os carros trativos:

$$VT = \{vt_1, vt_2, \dots, vt_n\}^t$$

Sendo que se $vt_i = 1$, o vagão possui sistema de tração e se $vt_i = 0$ ele não possui. A soma dos elementos de VT mostra o número de carros trativos na composição.

$$nt = \sum_{i=1}^n vt_i$$

Assim além das $2n$ variáveis de estado necessárias para descrever o sistema adicionamos mais nt variáveis para descrever o sistema de tração de modo que o vetor de estados passa a ser:

$$x = \{\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_{nt}, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n\}^t$$

A posição angular não influencia no comportamento do modelo e logo não é um estado do sistema, mas sim a sua derivada a velocidade angular que descreve o comportamento do sistema de tração.

O vetor de entradas para o trem completo é dado por:

$$u = \{e_1, \dots, e_{nt}, F_{x1}, \dots, F_{xnt}\}^t$$

E o vetor de perturbações por:

$$p = \{F_{res1}, \dots, F_{resn}\}^t$$

Deste modo as matrizes do sistema passam a ser:

$$A = \begin{bmatrix} A_\theta & 0_{nt \times 2n} \\ 0_{2n \times nt} & A_x \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_\theta \\ B_x \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 0_{n+nt \times 2n} \\ M_e^{-1} \end{bmatrix}$$

$$C = I_{2n+nt \times 2n+nt}; D = 0_{2n+nt \times 2nt}$$

Sendo que:

$$A_\theta = \frac{-K_1 K_2 i_t^2}{JR} \cdot I_{nt \times nt}; A_x = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ M_e^{-1} K_x & M_e^{-1} (C_x + C_\theta) \end{bmatrix}$$

$$B_\theta = \left[\frac{K_1 i_t}{JR} \cdot I_{nt \times nt} \quad -\frac{r_{roda}}{J} \cdot I_{nt \times nt} \right]; B_x = [0_{nt \times nt} \quad 4 \cdot (M_e^{-1})_{nt}]$$

As matrizes K_x , C_x e C_θ são as mesmas apresentadas no modelo aprimorado com sistema de tração. A matriz M_e , no entanto difere da utilizada anteriormente, pois só é incluída a inércia dos rodeiros como massa translacional nos vagões onde não há sistema de tração, já que para os vagões trativos a inércia está computada na equação que rege o sistema de tração deste vagão. Em particular a matriz $(M_e)_{nt}$ na descrição da matriz B_x representa a parcela da matriz M_e que representa a massa dos vagões com sistema de tração, ou seja, apenas a massa translacional pura do vagão.

No sistema tomado para estudo, composição de 8 vagões com 4 vagões trativos, temos a distribuição de tração dada por:

$$VT = \{1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1\}^t \rightarrow nt = 4$$

Assim o vetor de estados fica na forma:

$$x = \{\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_4, x_1, \dots, x_8, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_8\}^t$$

O vetor de entradas é dado pelas tensões fornecidas a cada um dos quatro conjuntos de motores e as forças nos contatos roda/trilho de cada um dos quatro vagões trativos. Genericamente se considerou que cada conjunto de motores de um vagão trativo pode receber uma tensão dedicada assim possibilitando um melhor controle do sistema. No entanto para efeitos de simulação foi utilizada uma mesma entrada de tensão para os quatro conjuntos.

Na modelagem apresentada para as forças resistivas ao movimento, utilizamos uma equação que as descreve para o trem completo. No entanto, a parcela de influência de cada vagão não é a mesma para a composição da força total. Considerou-se que todos os vagões contribuem igualmente para a força resistiva ao rolamento e de atrito viscoso de modo que os coeficientes por vagão são:

$$fA = 8202 \cdot \{0,125; 0,125; 0,125; 0,125; 0,125; 0,125; 0,125; 0,125\}$$

$$fB = 106,56 \cdot \{0,125; 0,125; 0,125; 0,125; 0,125; 0,125; 0,125; 0,125\}$$

No entanto para a força de arrasto aerodinâmico o primeiro e último vagões tem maior influência do que os vagões intermediários na composição da força total. Foi considerado que o primeiro vagão influencia quatro vezes mais que os vagões intermediários e que o último vagão influencia duas vezes mais que os intermediários de modo que temos:

$$fC = 11,93 \cdot \{0,333; 0,083; 0,083; 0,083; 0,083; 0,083; 0,083; 0,167\}$$

2.4.1 Simulação e análise

O sistema de equações de estado do modelo de trem completo foi implementado no software Scilab. Os parâmetros do sistema utilizados para simulação foram os mesmos utilizados no modelo preliminar e nos aprimorados.

O sistema foi simulado por 250 segundos submetido a uma entrada de tensão fornecida a uma taxa de 500 V/s e limitada em 1500 V, idêntica para todos os motores. A entrada é a mesma da simulação do modelo de um vagão com forças resistivas apresentado anteriormente.

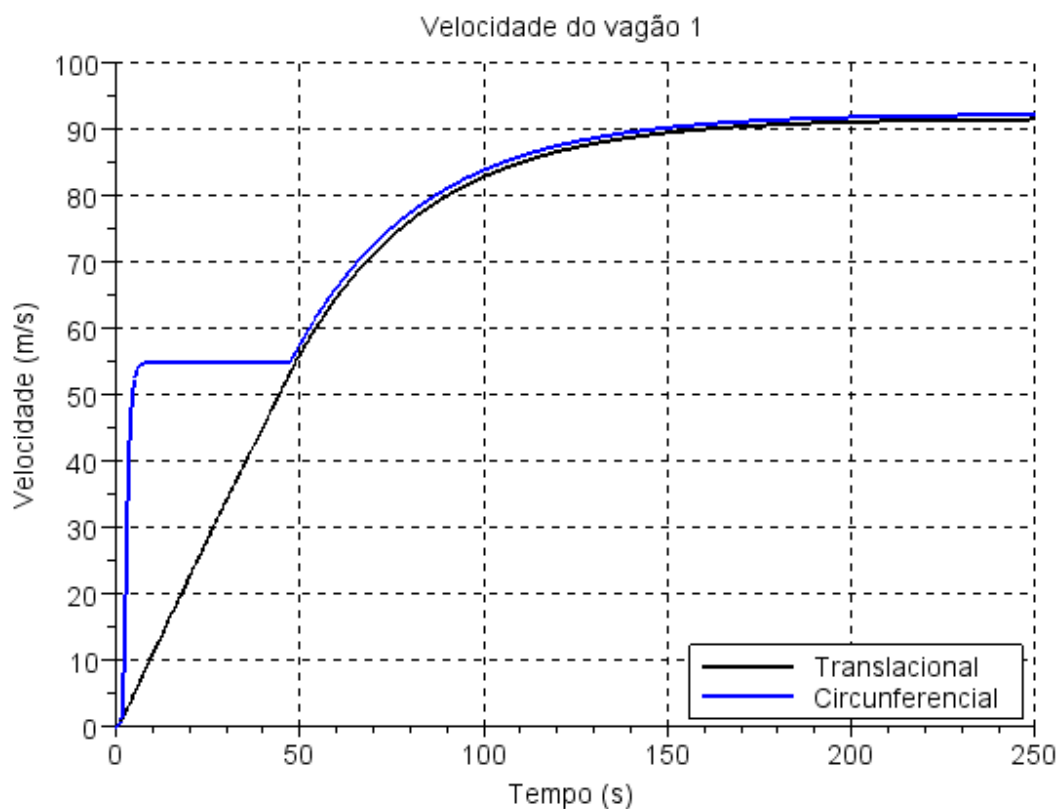


Figura 2.33 - Gráfico da velocidade do primeiro vagão na simulação do modelo completo

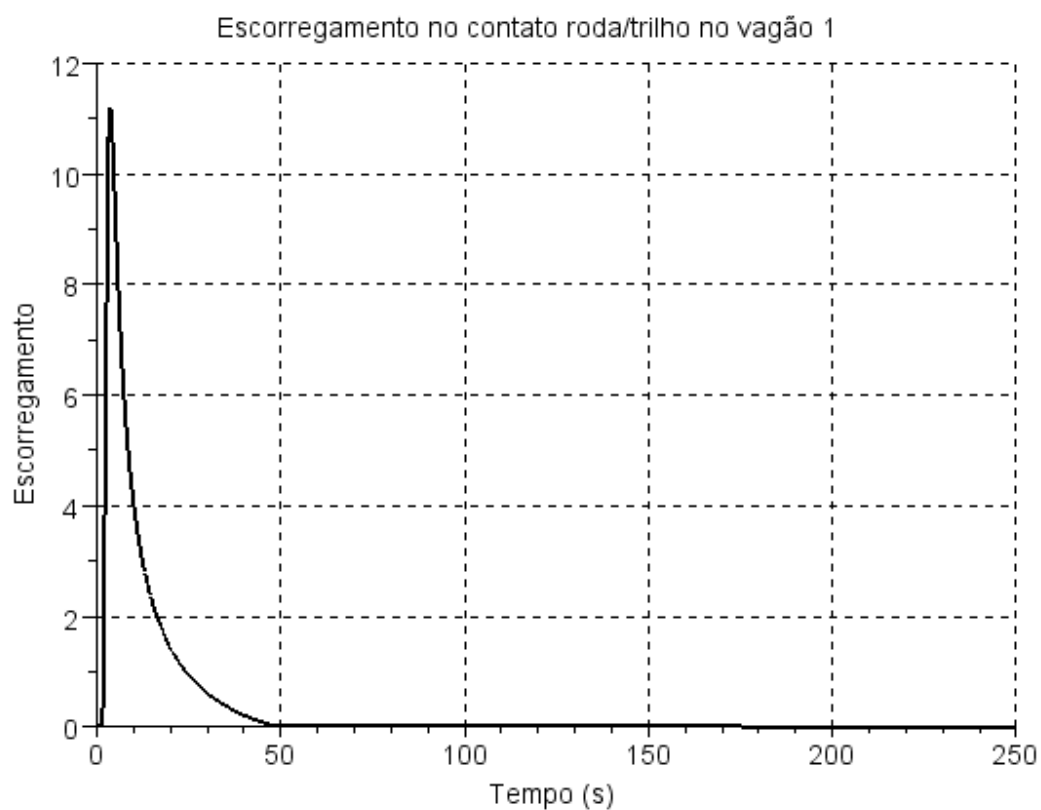


Figura 2.34 - Gráfico do escorregamento no contato roda/trilho para o primeiro vagão na simulação do modelo completo

Avaliando o gráfico da velocidade do primeiro vagão, Figura 2.33, verificamos que ocorreu a perda de aderência assim como no modelo de apenas um vagão. No entanto a perda de aderência no modelo completo ocorre em uma faixa maior de tempo, de 1,5 s a 47,3 s (Figura 2.34). Isso se deve à influência dos outros vagões sobre ele, pelo fato de cada sistema de tração ser responsável por dois vagões temos um sistema mais pesado e logo mais lento.

Verificamos que por este mesmo fato, o escorregamento tem um aumento do seu valor máximo de 129% passando de 4,9 para 11,2 e um aumento no seu valor em regime permanente de 62,5% passando de 0,00459 para 0,00746. O aumento destes valores representa redução no rendimento útil do sistema de tração e logo uma menor velocidade final é atingida, pois a potência mecânica fornecida é menor. A velocidade final atingida pelo primeiro vagão no modelo completo é de 91,5 m/s, 6% menor que no modelo de um único vagão.

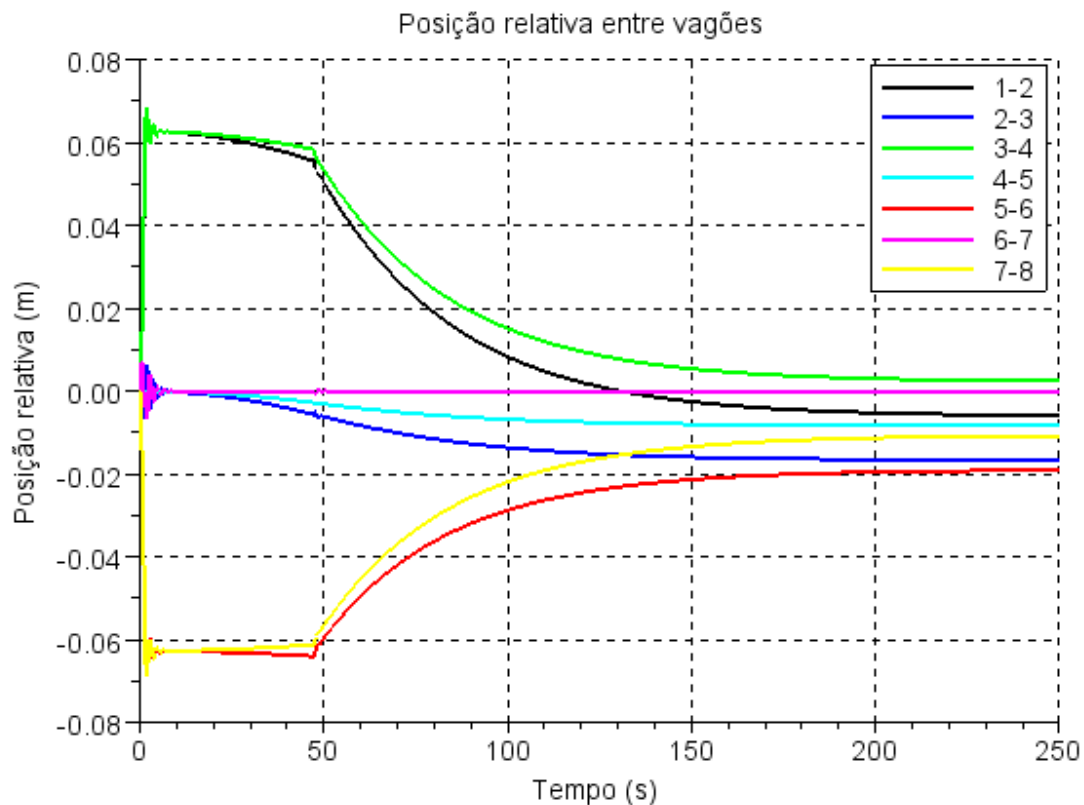


Figura 2.35 - Gráfico da posição relativa entre vagões para o modelo completo

Observando a Figura 2.35 que mostra a posição relativa entre os vagões, vemos dois efeitos: o aparecimento de uma faixa de posição relativa não nula constante nos primeiros 50 s de simulação e a perda de simetria em regime

permanente quando comparado com o modelo sem escorregamento e sem forças resistivas.

A faixa de posição relativa constante ocorre na mesma faixa de tempo em que ocorre a saturação da força no contato como vemos na Figura 2.36, que é a mesma faixa onde há a perda de aderência apontada acima, de 1,5 s a 47,3 s. Nesta faixa de tempo o sistema translacional se torna um sistema com entrada constante de força recaindo sobre o modelo preliminar apresentado onde encontrávamos valores em regime permanente não nulos para a posição relativa entre os vagões.

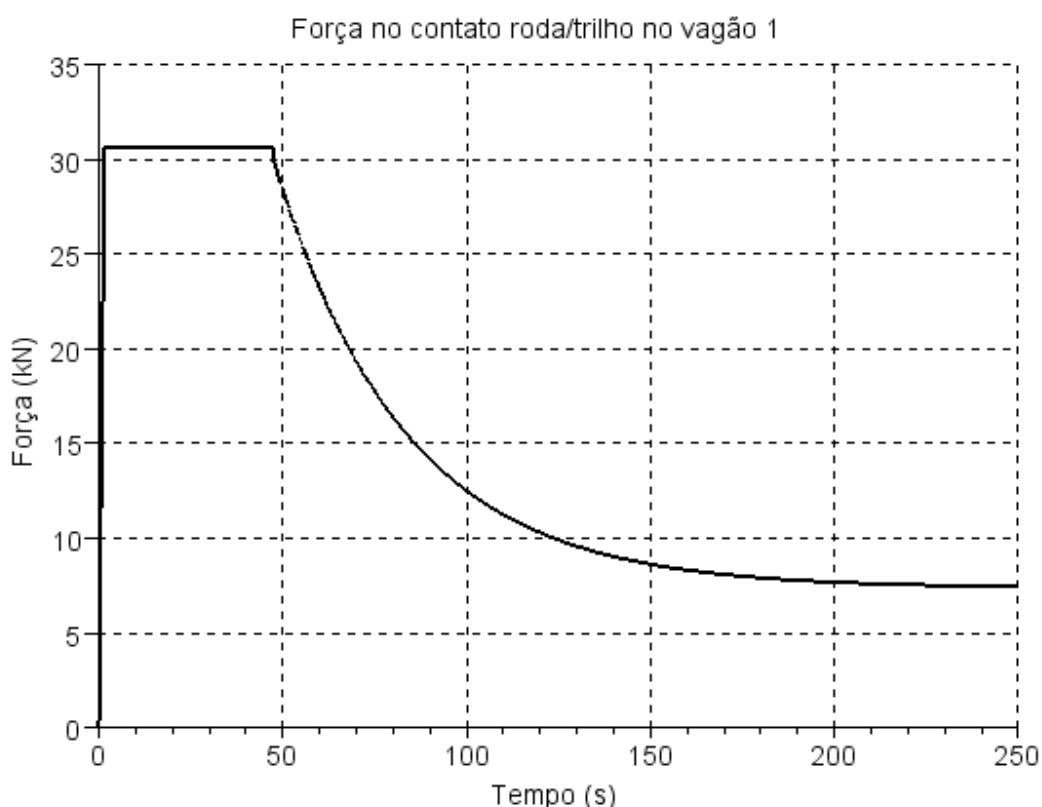


Figura 2.36 – Gráfico da força no contato roda/trilho para o primeiro vagão na simulação do modelo completo

Quando o sistema sai da faixa de saturação, retorna a aderência entre as velocidades translacional e circunferencial na roda e devido à saturação do motor e as forças resistivas ao movimento a posição relativa entre os vagões diminui, no entanto não tendem a zero como esperado, isso se deve pelo fato de o sistema de tração não obter uma saturação completa devido às forças resistivas atuantes. Podemos ver pelo gráfico da força de contato que ela possui um valor em regime permanente de 7,5 kN e logo não poderemos ter uma posição de equilíbrio nula para todos os acoplamentos como já se observava no modelo preliminar.

Mas verifica-se também que o ponto de equilíbrio do sistema não possui a simetria que se espera para um sistema simétrico. A assimetria surge da força resistiva imposta no modelo, o vetor f_C que descreve os coeficientes da parcela aerodinâmica da força resistiva não é simétrico e assim desloca o sistema do seu ponto de equilíbrio original. O novo ponto de equilíbrio do sistema observado é obtido pela soma das forças nos contatos e a forças resistivas em regime permanente. Enquanto no modelo preliminar o acoplamento 4-5 era o que possuía ponto de equilíbrio nulo, devido às forças resistivas esta condição de equilíbrio passa para o acoplamento 6-7.

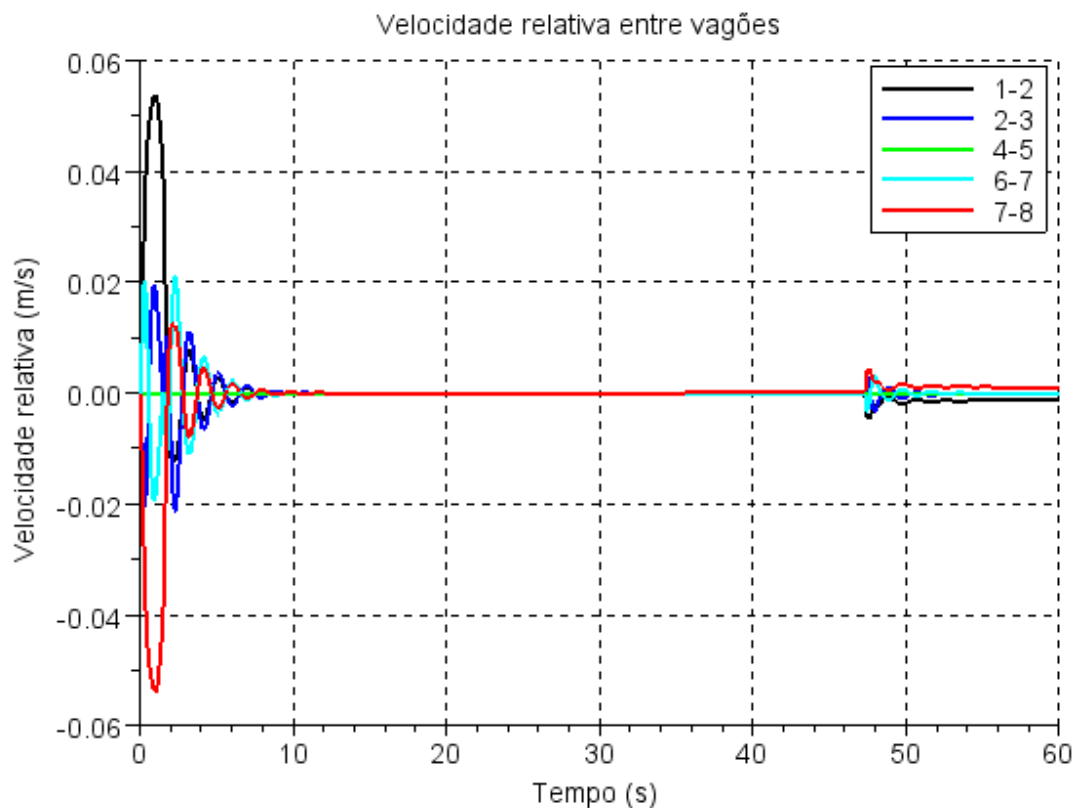


Figura 2.37 - Gráfico da velocidade relativa entre os vagões na simulação do modelo completo

Através do gráfico da velocidade relativa, Figura 2.37, vemos que tendem rapidamente a um ponto de equilíbrio nulo na faixa de tempo em que ocorre a saturação da força de contato e o sistema trabalha sobre uma força constante. Quando a velocidade circunferencial na roda retoma aderência com a translacional ocorre a diminuição da posição relativa nos acoplamentos causando uma excitação que tira o sistema do equilíbrio de velocidades. A partir deste instante o decaimento é mais lento, pois a assimetria das forças resistivas tende a distanciar os vagões.

Observando a Figura 2.38 que mostra o desvio do escorregamento dos sistemas de tração nos vagões 3 6 e 8 em relação ao primeiro vagão, vemos que o desvio chega ao máximo a 2,5% e logo em conjunto com as baixas velocidades relativas temos que os sistemas de tração trabalham muito próximos neste caso.

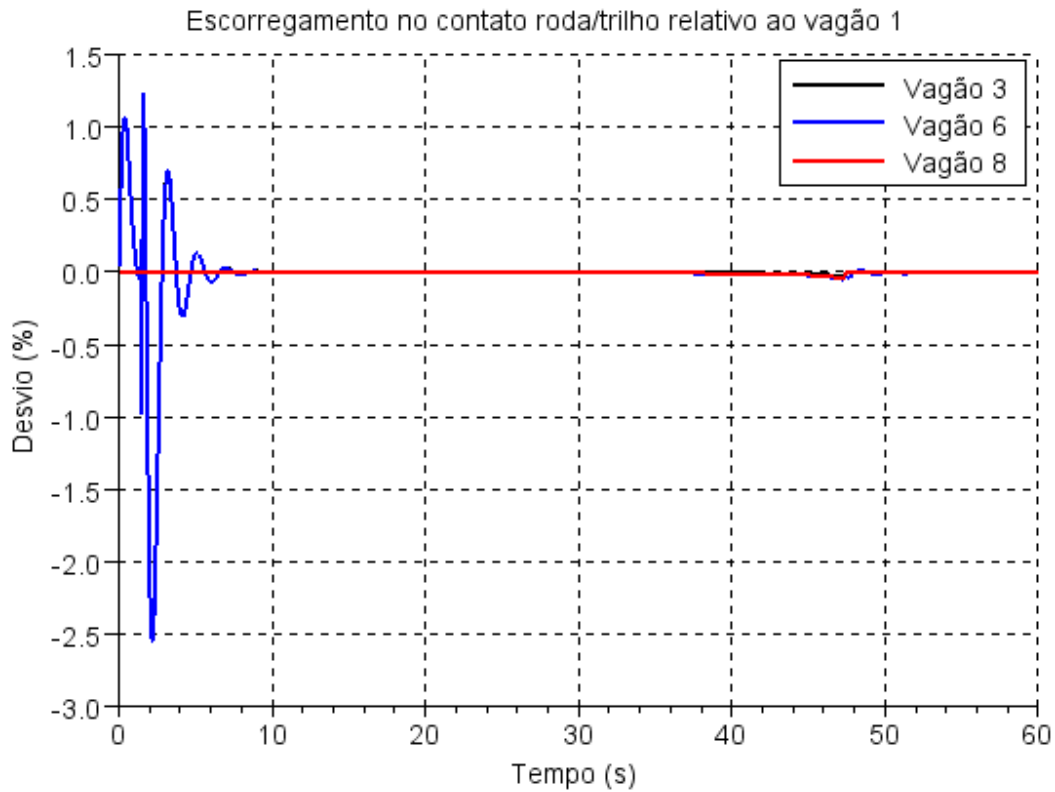


Figura 2.38 - Gráfico do escorregamento relativo ao primeiro vagão na simulação do modelo completo

Assim como no modelo de um vagão observamos na Figura 2.39, devido ao efeito da perda de aderência, o aumento do fornecimento de potência mecânica sem aumento correspondente de potência útil no sistema e logo um baixo rendimento. Devido às forças resistivas ao movimento os motores continuam fornecendo potência em regime permanente para manter o trem em movimento.

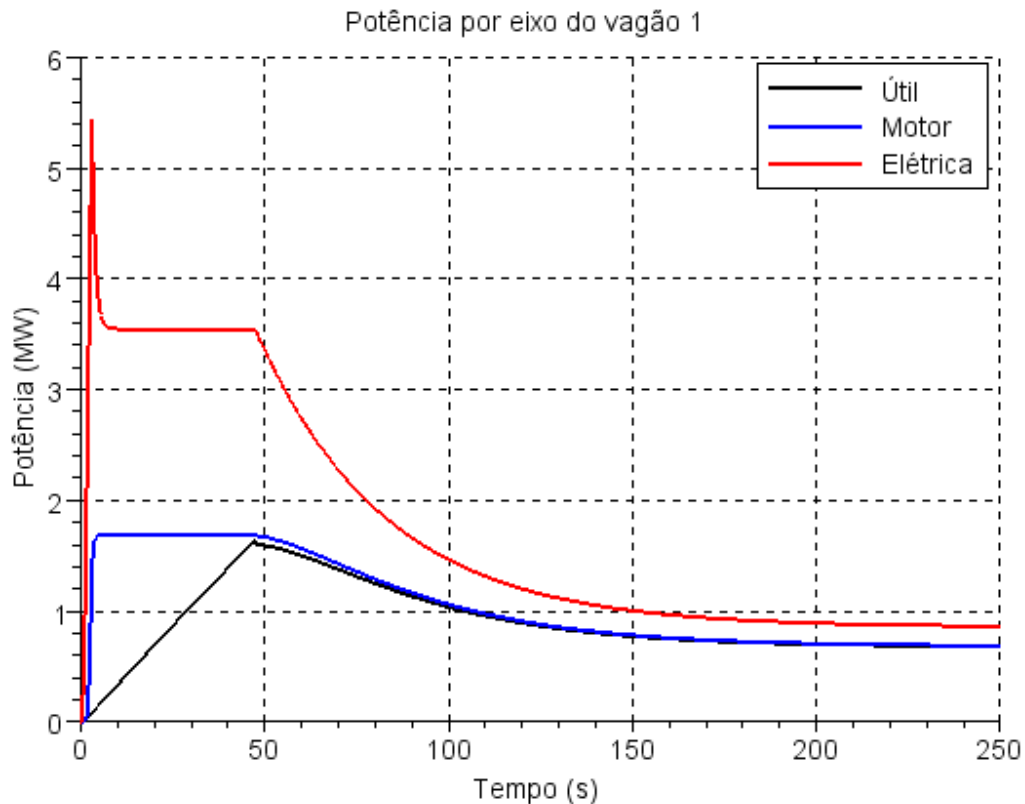


Figura 2.39 - Gráfico de potência para o primeiro vagão na simulação do modelo completo

Simulando o modelo completo do trem com uma entrada de tensão fornecida a uma taxa dez vezes menor (50 V/s), verificamos na Figura 2.40 da velocidade do primeiro vagão uma faixa de perda de aderência que não aparecia na simulação do modelo de um vagão quando submetido a esta mesma entrada de tensão.

Verificamos que a faixa de perda de aderência é menor do que quando submetido à entrada de 500 V/s, de modo que aqui podemos concluir novamente que o modo como se fornece a tensão ao sistema é de extrema relevância, no entanto ainda causando uma faixa de grande perda de potência como vemos na Figura 2.41.

Mas o ponto a se observar é que no modelo completo devido aos vagões sem sistema de tração o sistema se torna mais susceptível a entrar em faixas de perda de aderência e saturação da força no contato roda/trilho, mostrando a importância de um modelo que considera os componentes de maior importância na dinâmica longitudinal do trem para que se possa realizar um projeto de controlador mais direcionado.

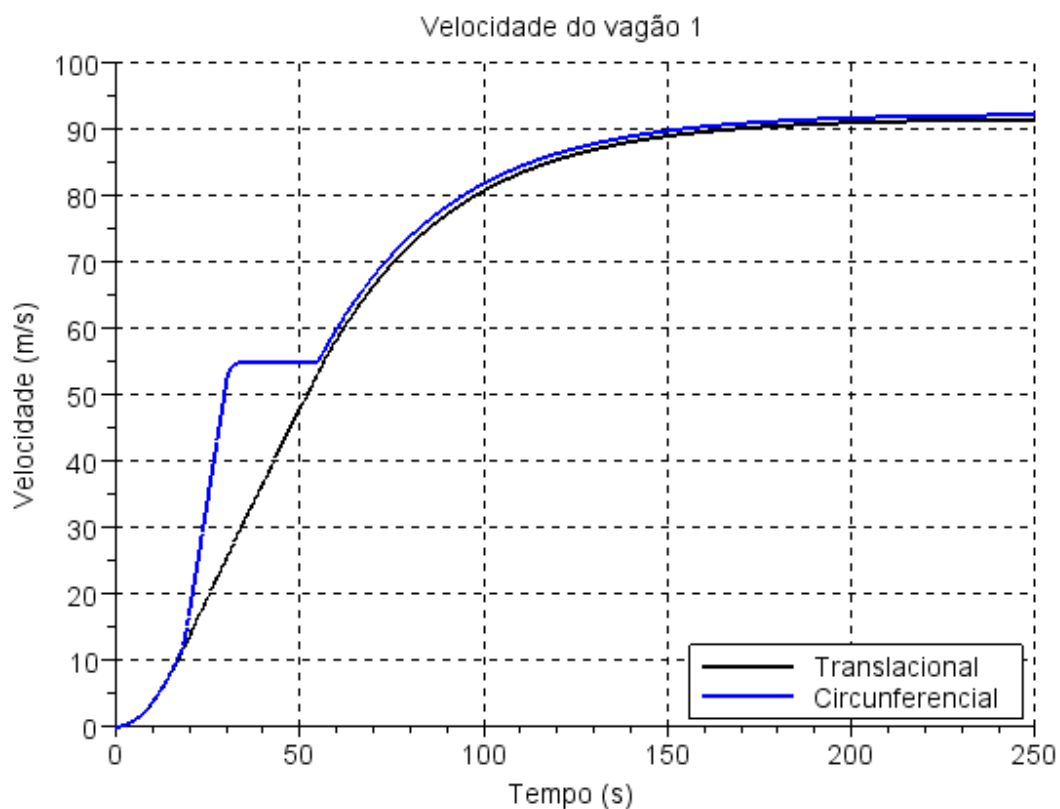


Figura 2.40 - Gráfico da velocidade do primeiro vagão na simulação do modelo completo com entrada de tensão a 50V/s

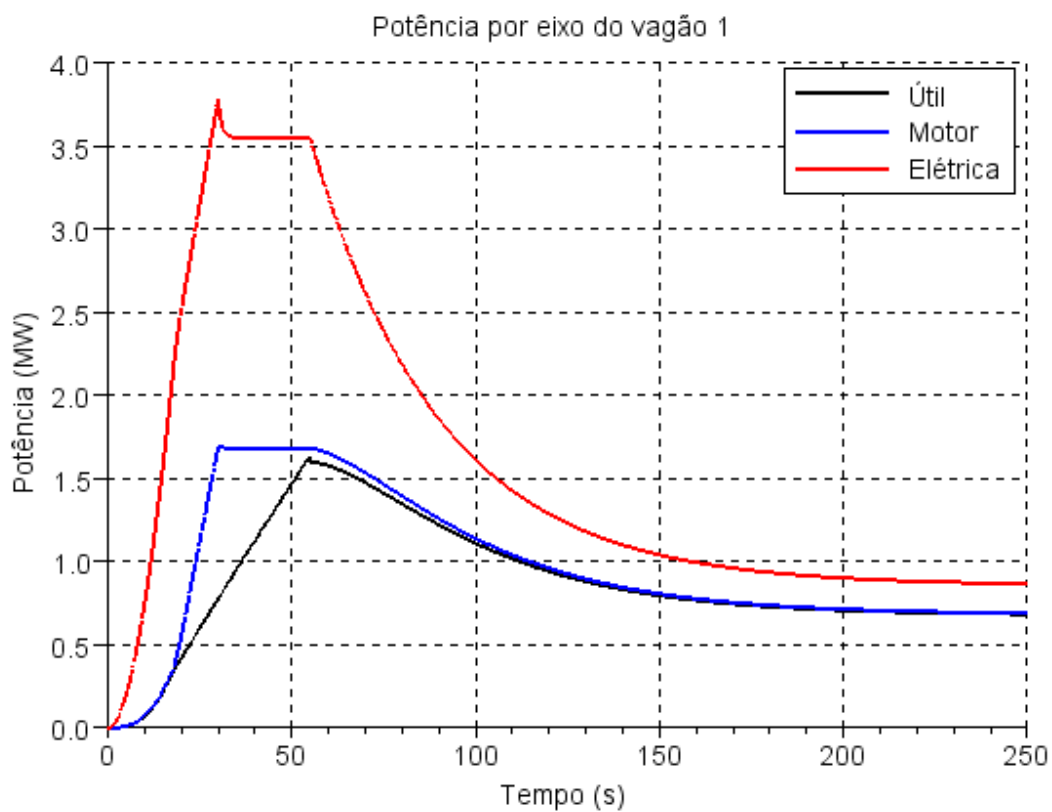


Figura 2.41 - Gráfico da potência do primeiro vagão na simulação do modelo completo com entrada de tensão a 50V/s

3 CONCLUSÃO

A modelagem da dinâmica longitudinal de um trem de alta velocidade foi realizada através da teoria base da dinâmica de corpos rígidos e simulada no software Scilab para uma composição de oito vagões de mesma massa interligados por acoplamentos mola/amortecedor lineares sendo os vagões 1, 3, 6 e 8 motorizados. As equações diferenciais de segunda ordem do movimento foram agrupadas utilizando a abordagem de espaço de estados transformando o sistema em uma equação diferencial de primeira ordem matricial.

Em simulação do modelo preliminar, sem motorização e mecânica de contato, verificaram-se oscilações relativas entre os vagões simétricas ao longo do trem como esperado, já que o sistema avaliado também é simétrico. Utilizando a abordagem de autovalores e autovetores obtiveram-se as frequências naturais e modos naturais de vibração do sistema, onde se observou mais uma vez a simetria do problema estudado e também a existência de uma frequência nula que representa o movimento de corpo rígido do trem como um todo, também chamado de modo degenerado do sistema.

O modelo foi aprimorado primeiramente pela introdução da modelagem do sistema de tração considerado elétrico com motores CC de comportamento linear idênticos nos quatro eixos de cada vagão. Como o sistema foi considerado como não possuindo escorregamento no contato roda/trilho, a introdução do sistema de tração não ocasionou uma mudança na ordem do sistema estudado, ou seja, no número de equações diferenciais. O sistema ainda abordado em espaço de estados foi simulado e apresentou comportamento relativo entre vagões semelhante ao modelo preliminar. No entanto devido ao efeito de saturação do motor, dado pelo aumento da tensão induzida na armadura pelo aumento da rotação do motor que leva à anulação da corrente do motor e conseqüentemente do torque, verifica-se uma limitação da velocidade do trem ao longo do tempo. Efeito que se confirma pelo aparecimento de amortecimento no modo de corpo rígido do sistema. Este amortecimento adicional causou variação máxima de 2% nos demais polos do sistema e modos naturais associados.

A seguir foi introduzida a mecânica do contato roda/trilho sendo avaliada inicialmente para um único vagão motorizado. Considerou-se o modelo linear para a força de contato com saturação de acordo com a Lei de Coulomb. A consideração

da mecânica de contato necessita de um desacoplamento matemático do sistema de tração (motor e rodeiro) da composição de vagões, dobrando o número de equações diferenciais para um vagão motor. A simulação possibilitou a observação da saturação da força de contato e consequente aumento acentuado do escorregamento mostrando a perda de aderência entre as velocidades circunferencial e translacional na roda. A diferença observada na potência fornecida pelos motores e a utilizada no movimento translacional do vagão justifica a importância da consideração deste efeito na dinâmica longitudinal do trem para que o projeto do controlador seja consistente com o comportamento real do sistema.

Ao modelo de um vagão foram adicionadas as forças resistivas ao movimento: rolamento, atrito viscoso e aerodinâmica; através da aproximação quadrática fornecida pela Fórmula de Davis. Isso levou a um comportamento ativo do sistema de tração em regime permanente, ou seja, fornecendo potência ao sistema para mantê-lo em movimento. Verificou-se que as forças resistivas contribuem para a perda de aderência entre as velocidades translacional e circunferencial na roda, e com isso para um rendimento menor do sistema de tração, justificando a necessidade de sua inclusão no modelo para melhor avaliação das perdas do sistema.

A partir dos modelos aprimorados montou-se um modelo completo da dinâmica de um trem de alta velocidade com tração elétrica por motores de corrente contínua lineares, mecânica de contato roda/trilho linear com saturação por Lei de Coulomb, acoplamentos mola/amortecedores lineares e forças resistivas ao movimento. Comparando com o modelo de um vagão verificou-se que a existência de vagões sem sistema de tração na composição contribui para o aumento da perda de aderência e redução do rendimento do sistema de tração. Comprovando assim a necessidade de um modelo complexo e realístico do sistema para que se possa avaliar com precisão o aparecimento da região perda de aderência e preveni-la através de controle de tração.

Observou-se também nos modelos com mecânica de contato que a perda de aderência é sensível ao modo como a tensão de entrada é aplicada aos motores, no caso, sensível a sua taxa de fornecimento. Isso mostra a necessidade de um controle preciso em malha fechada da tensão fornecida aos motores, não havendo possibilidade de acionamento direto pelo condutor prevenindo assim a perda de

aderência entre as velocidades translacional e circunferencial na roda com consequente queda do rendimento do sistema de tração e evitando a degradação da via.

4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABB MOTORS AND GENERATORS. **Traction motors reference list EN 02-2011**. [S.l.]. 2011.

ALSTOM TRANSPORT. **The High Speed Rail System in Korea**. Paris. 2004.

BARBOSA, R. S. **Estudo da dinâmica longitudinal do trem**. Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, p. 179. 1993.

FRIEDLAND, B. **Control system design: an introduction to state-space methods**. Mineola: Dover, 2005.

IWNICKI, S. **Handbook of railway vehicle dynamics**. Boca Raton: CRC Press, 2006.

KALKER, J. J. Wheel-rail rolling contact theory. **Wear**, v. 144, p. 243-261, 1991.

LEWIS, S. R.; LEWIS, R.; OLOFSSON, U. An alternative method for the assessment of railhead traction. **Wear**, v. 271, p. 62-70, 2011.

RAILWAY Technical Web Pages. Disponível em: <<http://www.railway-technical.com>>. Acesso em: abril 2012.

ROCHARD, B. P.; SCHIMID, F. A review of methods to measure and calculate train resistances. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit**, v. 214, n. 4, p. 185-199, Julho 2000.

SIEMENS AG. **High speed train set Velaro CRH3**. Erlangen. 2008.

WILDI, T. **Electrical machines, drives and power systems**. 3rd international. ed. [S.l.]: Prentice-Hall International, Inc., 1997.

YANASE, N. **Necessities for future high speed rolling stock**. UIC - International Union of Railways. Paris. 2010.

5 ANEXOS

ANEXO A Programa implementado no software Scilab para simulação do modelo aprimorado considerando o sistema de tração elétrico na dinâmica longitudinal do trem completo.

```
//Thiago Leister Sá
//Modelo da dinâmica longitudinal de um trem de alta velocidade com tração
elétrica por motor CC
xdel(winsid());
clc;
clear;
//Função que calcula a força trativa em um vagão
function e=tensao(t)
    e=min(ke*t+e0,emax);
//    e=ones(t)*emax;
endfunction;

function Ydot=sistema(t, Y, tensao) //Função que descreve a equação
diferencial de estados do sistema
    U=tensao(t);
    Ydot = A*Y+B*U;
endfunction;

// Programa principal
//Constantes do problema
k=1e6; //Constante da mola [N/m]
c=1e5; //Constante do amortecedor [N.s/m]
r_roda=0.5; //Raio da roda [m]
n=8; //Número de vagões
MV=[50000; 50000; 50000; 50000; 50000; 50000; 50000]; //Vetor coluna
com as massas dos vagões [kg]; deve ser compatível com n
I_rodeiro=145; //Inércia do rodeiro [kg.m²]
VT=[1;0;1;0;0;1;0;1]; //Vetor coluna de vagões trativos, 1 representa
trativo, 0 representa tracionado; deve ser compatível com n
K1=3.24; //Fator de proporcionalidade do torque T
K2=3.6; //Fator de proporcionalidade da tensão induzida v
R=0.9; //Resistência do motor [ohm]
it=2; //Relação de transmissão da redução do truque
ke=1000; //Constante de proporcionalidade da tensão fornecida
[V/s]
emax=2500*R/K1; //Tensão máxima permitida no motor [V]
e0=0; //Tensão inicial fornecida no motor [V]

//Condições iniciais
V0=0; //velocidade inicial do trem [m/s]
Y0=[zeros(n,1);V0*ones(n,1)];

//Verificação de incompatibilidades
if size(MV,'r')~=n
    disp('Erro#1: Vetor de massas incompatível com o número de vagões');
elseif size(MV,'c')~=1
    disp('Erro#2: Vetor de massas incompatível com o número de vagões');
end;
if size(VT,'r')~=n
    disp('Erro#3: Vetor de vagões trativos incompatível com o número de
vagões');
elseif size(VT,'c')~=1
```

```

disp('Erro#4: Vetor de vagões tratativos incompatível com o número de
vagões');
end;

//Matrizes do sistema
Kx(1,1)=-k;
Kx(1,2)=k;
Kx(n,n-1)=k;
Kx(n,n)=-k;
Cx(1,1)=-c;
Cx(1,2)=c;
Cx(n,n-1)=c;
Cx(n,n)=-c;
for i=2:n-1
    Kx(i,i-1)=k;
    Kx(i,i)=-2*k;
    Kx(i,i+1)=k;
    Cx(i,i-1)=c;
    Cx(i,i)=-2*c;
    Cx(i,i+1)=c;
end;
Cteta=diag(VT*(-4*K1*K2*it^2/(R*r_roda^2)));
M=diag(MV+4*I_rodado/r_roda^2);
A=[zeros(n,n) eye(n,n); inv(M)*Kx inv(M)*(Cx+Cteta)];
Asimp=[zeros(n,n) eye(n,n); inv(M)*Kx inv(M)*Cx];
B=[zeros(n,1); 4*K1*it/(R*r_roda)*VT./diag(M)];

//Integração
t0=0;
tf=500;
dt=0.01;
t=[t0:dt:tf];
Y = ode(Y0,t0,t,list(sistema,tensao));
omegam=Y(n+1,:)*it/r_roda; //Vel. angular do motor do vagão 1 (rad/s)
v=K2*omegam; //Tensão induzida no motor do vagão 1 (V)
im=(tensao(t)-v)/R; //Corrente no motor do vagão 1 (A)
Tm=K1*im; //Torque no motor do vagão 1 (N.m)
Ft=Tm*it/r_roda; //Força trativa em um eixo do vagão 1 (N)
pm=Tm.*omegam; //Potência no motor do vagão 1 (W)
pe=tensao(t).*im; //Potência elétrica no motor do vagão 1 (W)
difx=[Y(1,:)-Y(2,:);Y(2,:)-Y(3,:);Y(4,:)-Y(5,:);Y(6,:)-Y(7,:);Y(7,:)-
Y(8,:)];
difxdot=[Y(n+1,:)-Y(n+2,:);Y(n+2,:)-Y(n+3,:);Y(n+4,:)-Y(n+5,:);Y(n+6,:)-
Y(n+7,:);Y(n+7,:)-Y(n+8,:)];

//Frequências e modos naturais
omega=[];
modo=[];
amort=[];
[modo,lambdam]=spec(A);
lambdav=diag(lambdam);
transf1=eye(n,2*n);
transf2=zeros(2*n,n);
transf2(1:2*n:2*n^2)=1;
phi=transf1*real(modo)*transf2;
for i=1:n
    norma=norm(phi(:,i));
    phi(:,i)=phi(:,i)/norma;
end;
omega=imag(lambdav(1:2:2*n));
amort=real(lambdav(1:2:2*n));

```

```
omegaHz=omega/(2*pi);  
pA=poly(Asimp,'s');  
polosAsimp=roots(pA);
```

ANEXO B Programa implementado no software Scilab para simulação da dinâmica longitudinal de um vagão com tração elétrica e considerando modelo linear para a mecânica de contato roda/trilho.

```

//Thiago Leister Sá
//Modelagem da dinâmica longitudinal de um vagão motorizado
//Considerando tração elétrica por motor DC linear, escorregamento no
contato roda/trilho e forças resistentes ao movimento
xdel(winsid());
clc;
clear;
//Função que descreve a dinâmica do sistema
function ydot=sistema(t, y, tensao)
    if y(2)*r-y(4)==0 //Avaliação do escorregamento
        s=0;
    elseif y(4)==0
        s=mi*N/kf;
    else s=(y(2)*r-y(4))/y(4);
    end;
    Fx=min(kf*s,mi*N) //Cálculo da força no contato
    Tb=K1*tensao(t)/R //Torque bruto fornecido pelo motor
    Tres=max(0, (Tb*it-Fx*r)/J)
    Fresmov=a*min(0.001,y(4))/0.001+b*y(4)+c*y(4)^2;
    B=[0; Tres; 0; (4*Fx-Fresmov)/M] //Matriz das entradas do sistema
    ydot=A*y+B;
endfunction;

//Função para a tensão de entrada no sistema
//Tensão parte de 'e0' e aumenta no tempo a uma taxa 'ke' até o limite
'emax'
function e=tensao(t)
    e=min(ke*t+e0,emax);
// e=ones(t)*emax;
endfunction;

//Parâmetros do modelo
M=50000 //Massa do veículo [kg]
J=145; //Inércia da carga [kg.m2]
r=0.5; //Raio da roda (m)
K1=3.24; //Fator de proporcionalidade do torque T
K2=3.6; //Fator de proporcionalidade da tensão induzida v
R=0.3; //Resistência do motor [ohm]
it=2; //Relação de transmissão da redução do truque
ke=500; //Constante de proporcionalidade da tensão fornecida [V/s]
emax=1500; //Tensão máxima permitida no motor [V]
e0=0; //Tensão inicial fornecida no motor [V]
kf=1e6; //Coeficiente de proporcionalidade da força de contato
mi=0.25; //Coeficiente de atrito roda/trilho
g=9.81; //Aceleração da gravidade (m/s2)
N=M*g/4; //Normal no contato, 4 eixos
a=8202/8; //Constante da força resistiva
b=106.56/8; //Coeficiente linear da força resistiva
c=11.93/8; //Coeficiente quadrático da força resistiva

//Matrizes dinâmica do sistema
A=[0 1 0 0; 0 -K1*K2*it^2/(J*R) 0 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0];

//Simulação
t0=0;

```



```

tf=100;
dt=0.01;
t=t0:dt:tf;
y0=[0;0;0;0];
y=ode(y0,t0,t,list(sistema,tensao));
teta=y(1,:);
omega=y(2,:);
omegam=omega*it;
x=y(3,:);
xdot=y(4,:);

//Avaliação de variáveis derivadas
v=K2*omegam; //Tensão induzida no motor
im=(tensao(t)-v)/R; //Corrente no motor
Tm=K1*im; //Torque do motor
pe=tensao(t).*im; //Potência elétrica
pm=omegam.*Tm; //Potência mecânica
s=zeros(t);
for count=1:tf/dt+1
    if y(2,count)*r-y(4,count)==0
        s(count)=0;
    elseif y(4,count)==0
        s(count)=y(2,count);
    else s(count)=(y(2,count)*r-y(4,count))/y(4,count);
    end;
end;
Fx=min(kf*s,mi*N);
pu=xdot.*Fx;
Ee=inttrap(t,pe);
Em=inttrap(t,pm);
Eu=inttrap(t,pu);
rendme=pm(2:(tf-t0)/dt+1)./pe(2:(tf-t0)/dt+1);
rendum=pu(2:(tf-t0)/dt+1)./pm(2:(tf-t0)/dt+1);

```

ANEXO C Programa implementado no software Scilab para simulação da dinâmica longitudinal de um trem completo com tração elétrica, mecânica de contato roda/trilho linear e forças resistivas ao movimento

```
//Thiago Leister Sá
//Modelo completo da dinâmica longitudinal de um trem de alta velocidade
//Tração elétrica por motor CC linear, mecânica de contato roda/trilho
//linear e forças resistivas ao movimento
xdel(winsid());
clc;
clear;
tic();
//Função que calcula a força trativa em um vagão
function e = tensao(t)
    e=min(ke*t+e0,emax);
    // e=ones(t)*emax;
endfunction;

function Ydot = sistema(t,Y,tensao) //Função que descreve a equação
diferencial de estados do sistema
    for i=1:nt
        if Y(i)*r_roda-Y(nt+n+nti(i))==0 //Avaliação do escorregamento
            s(i)=0;
        elseif Y(nt+n+nti(i))==0
            s(i)=mi*N(nti(i))/kf;
        else s(i)=(Y(i)*r_roda-Y(nt+n+nti(i)))/Y(nt+n+nti(i));
        end;
    end;
    Fx=min(kf*s,mi*N(nti)) //Cálculo da força no contato
    Tb=K1*ones(Fx)*tensao(t)/R //Torque bruto fornecido pelo motor
    Tres=max(0,(Tb*it-Fx*r_roda)/I_roteiro);

    Fresmov=fa.*min(0.1,Y(nt+n+1:nt+2*n))/0.1+fb.*Y(nt+n+1:nt+2*n)+fc.*Y(nt+n+1:nt+2*n)^2;
    U=[Tres; 4*Fx];
    Ydot = A*Y+B*U+P*(Fresmov./diag(M));
endfunction;

// Programa principal
//Constantes do problema
k=1e6; //Constante da mola [N/m]
c=1e5; //Constante do amortecedor [N.s/m]
r_roda=0.5; //Raio da roda [m]
n=8; //Número de vagões
MV=[50000; 50000; 50000; 50000; 50000; 50000; 50000; 50000]; //Vetor coluna
com as massas dos vagões [kg]; deve ser compatível com n
I_roteiro=145; //Inércia do roteiro [kg.m²]
VT=[1;0;1;0;0;1;0;1]; //Vetor coluna de vagões trativos, >0 representa
trativo, 0 representa tracionado; deve ser compatível com n
nt=sum(VT);
nti=find(VT==1);
K1=3.24; //Fator de proporcionalidade do torque T
K2=3.6; //Fator de proporcionalidade da tensão induzida v
R=0.3; //Resistência do motor [ohm]
it=2; //Relação de transmissão da redução do truque
ke=50; //Constante de proporcionalidade da tensão fornecida [V/s]
emax=1500; //Tensão máxima permitida no motor [V]
e0=0; //Tensão inicial fornecida no motor [V]
g=9.81; //Aceleração da gravidade (m/s²)
```

```

N=MV*g/4;          //Normal no contato, 4 eixos
mi=0.25;           //Coeficiente de atrito roda/trilho
kf=1e6;            //Coeficiente de proporcionalidade da força de contato
va=[1 1 1 1 1 1 1 1]';
vb=[1 1 1 1 1 1 1 1]';
vc=[4 1 1 1 1 1 1 2]';
fa=8202*va/sum(va);
fb=106.56*vb/sum(vb);
fc=11.93*vc/sum(vc);

//Condições iniciais
V0=0; //velocidade inicial do trem [m/s]
Y0=[V0/r_roda*ones(nt,1);zeros(n,1);V0*ones(n,1)];

//Verificação de incompatibilidades
if max(size(MV))~=n
    disp('Vetor de massas incompatível com o número de vagões1');
elseif min(size(MV))~=1
    disp('Vetor de massas incompatível com o número de vagões2');
end;
if max(size(VT))~=n
    disp('Vetor de vagões trativos incompatível com o número de vagões3');
elseif min(size(VT))~=1
    disp('Vetor de vagões trativos incompatível com o número de vagões4');
end;
disp('Dados inseridos compatíveis: '+string(toc())+' segundos.');
```

```

//Matrizes do sistema
Kx(1,1)=-k;
Kx(1,2)=k;
Kx(n,n-1)=k;
Kx(n,n)=-k;
Cx(1,1)=-c;
Cx(1,2)=c;
Cx(n,n-1)=c;
Cx(n,n)=-c;
for i=2:n-1
    Kx(i,i-1)=k;
    Kx(i,i)=-2*k;
    Kx(i,i+1)=k;
    Cx(i,i-1)=c;
    Cx(i,i)=-2*c;
    Cx(i,i+1)=c;
end;
M=diag(MV+(1-VT)*4*I_rodeiro/r_roda^2);
Ax=[zeros(n,n) eye(n,n); inv(M)*Kx inv(M)*Cx];
Bx=zeros(2*n,2*nt);
for i=1:nt
    Bx(n+nti(i),nt+i)=1/MV(nti(i));
end;
Ateta=-K1*K2*it^2/(I_rodeiro*R)*eye(nt,nt);
Bteta=[eye(nt,nt) zeros(nt,nt)];
A=[Ateta zeros(nt,2*n); zeros(2*n,nt) Ax];
B=[Bteta; Bx];
P=-[zeros(n+nt,n); eye(n,n)]
disp('Matrizes do problema criadas: '+string(toc())+' segundos.');
```

```

//Integração
t0=0;
tf=250;
```

```

dt=0.01;
t=[t0:dt:tf];
Y = ode(Y0,t0,t,list(sistema,tensao));
disp('Simulação do sistema bem sucedida: '+string(toc())+' segundos.');
```

omegam=Y(1:nt,:)*it; //Velocidade angular do motor (rad/s)

v=K2*omegam; //Tensão induzida no motor (V)

im=(ones(nt,1)*tensao(t)-v)/R; //Corrente no motor (A)

Tm=K1*im; //Torque no motor(N.m)

pe=ones(nt,1)*tensao(t).*im; //Potência elétrica em cada vagão (W)

pm=omegam.*Tm; //Potência mecânica em cada vagão (W)

s=zeros(nt,size(t,'*'));

for cont=1:(tf-t0)/dt+1 //Avaliação do escorregamento

for i=1:nt

if Y(i,cont)*r_roda-Y(nt+n+nti(i),cont)==0

s(i,cont)=0;

elseif Y(nt+n+nti(i),cont)==0

s(i,cont)=mi*N(nti(i))/kf;

else s(i,cont)=(Y(i,cont)*r_roda-

Y(nt+n+nti(i),cont))/Y(nt+n+nti(i),cont);

end;

end;

end;

Fx=min(kf*s,mi*N(nti)*ones(t));

pu=Y(nt+n+nti,:).*Fx;

difx=Y(nt+1:nt+n-1,:)-Y(nt+2:nt+n,:);

difxdot=Y(nt+n+1:nt+2*n-1,:)-Y(nt+n+2:nt+2*n,:);

srel=(s(2:nt,2:tf/dt+1)-ones(nt-1,1)*s(1,2:tf/dt+1))./(ones(nt-1,1)*s(1,2:tf/dt+1))*100;

Fresmov=diag(fa)*min(0.1,Y(nt+n+1:nt+2*n,:))/0.1+diag(fb)*Y(nt+n+1:nt+2*n,:)+diag(fc)*Y(nt+n+1:nt+2*n,:).^2;

rendme=pm(:,2:(tf-t0)/dt+1)./pe(:,2:(tf-t0)/dt+1);

rendum=pu(:,2:(tf-t0)/dt+1)./pm(:,2:(tf-t0)/dt+1);

disp('Variáveis derivadas criadas: '+string(toc())+' segundos.');